Mémorial des sciences mathématiques

A. Sainte-Laguë

Géométrie de situation et jeux

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 41 (1929), p. 1-75.
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1929__41__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE XLI

Géométrie de situation et jeux

PAR M. A. SAINTE-LAGUË

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1929

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION
ET JEUX

Par M. A. SAINTE-LAGUË

INTRODUCTION.

1. Géométrie de situation. — La *Géométrie de situation*, ou *Topologie*, est une science relativement moderne. Quoique Euler s'en soit occupé et que, sous le nom de « récréations mathématiques », on trouve des études beaucoup plus anciennes, en fait il n'y a pas plus d'un siècle qu'elle a provoqué des travaux mathématiques un peu importants. Les difficultés que l'on y rencontre à chaque pas sont souvent insurmontables. C'est qu'en effet la géométrie de situation joue par rapport à la géométrie le même rôle que la théorie des nombres par rapport à l'algèbre [16], avec cette aggravation que la géométrie pure ne disposant pas, autant que l'algèbre, de ce puissant moyen de recherche qu'est le calcul, la géométrie de situation se trouve, plus encore que la théorie des nombres, privée de méthodes générales.

Dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* un premier fascicule (n° XVIII : *les Réseaux ou Graphes*) [*M.*] a déjà été consacré à la géométrie de situation. Celui-ci vient le compléter, quoique les deux puissent être considérés comme complètement indépendants.

Dans le premier fascicule nous avons traité les questions plus particulièrement théoriques, réservant pour celui-ci les applications. C'est pourquoi on trouvera ici, à côté de l'importante question du *coloriage des cartes*, l'étude de quelques *récréations mathématiques* et de ceux des *jeux*, appelés parfois *jeux de situation* ou *jeux de position* qui font intervenir la disposition relative dans le plan ou dans l'espace de pièces mobiles. Nous exclurons par contre de cette étude les *jeux de probabilité*, dans lesquels, comme pour les jeux de cartes, le calcul des probabilités intervient à chaque instant.

2. Un autre caractère distingue les deux fascicules. L'étude des réseaux ne se préoccupe que des connexions entre divers éléments pour lesquels on se demande s'ils sont ou non associés entre eux, tandis que la géométrie de situation fait intervenir souvent des notions plus complexes. C'est ainsi que dans le coloriage des cartes, à côté de la considération des régions adjacentes, s'introduisent des conditions nouvelles, puisque toute liste de connexions d'éléments deux à deux ne correspond pas forcément à une carte possible, et c'est pourquoi la situation respective des éléments joue ici un rôle dont il n'y avait pas l'équivalent dans les questions déjà traitées par les réseaux.

Dans le présent fascicule, nous aurions pu considérer un grand nombre de questions souvent très ardues que l'on rencontre dans les volumes de récréations mathématiques. Quelques-unes, comme les carrés magiques ou le problème des 36 officiers d'Euler, appartiennent, il est vrai, à l'arithmétique supérieure, mais certaines autres se rattacheraient assez directement à la géométrie de situation. Citons à titre d'exemple le nombre de façons de découper un polygone en triangles [12, 17, 29]. Le pavage du plan avec des polygones réguliers [17, 22, 28, 29], le pliage du papier [12, 29, 31], le découpage de rectangles en rectangles semblables [8], celui du pentagone régulier en morceaux qui, assemblés différemment, donnent un carré [12, 29] et autres problèmes ou « casse-têtes » analogues, ou encore des problêmes tels que le suivant qui n'admet qu'une solution : grouper autour d'un rectangle de dimensions 41×1 des carrés à côtés tous différents de façon à former au total un carré [12]. Nous avons écarté la plupart de ces questions d'abord pour nous restreindre, mais aussi parce qu'elles comportent souvent une idée de mesure qui nous éloigne un peu de la géométrie de situation.

3. **Plan adopté.** — Une moitié environ du présent volume est consacrée à la très importante question du *théorème des quatre couleurs* ou *problème de la carte*, autour de laquelle se sont groupés d'importants travaux. A ces questions on peut en rattacher quelques autres telles que le *problème des aspects* soulevé par Laisant ou celle

du *jeu de Hamilton*, qui cependant sera mieux à sa place dans les jeux de position.

La deuxième moitié du volume concerne les *récréations mathématiques* et les *jeux de situation*. Nous avons commencé par les jeux que l'on peut appeler *linéaires* ou *circulaires*, jeux dans lesquels on étudie les dispositions d'objets, identiques ou non, entre lesquels des échanges peuvent être faits.

Nous avons achevé cette étude par celle des *jeux plans* en appelant ainsi ceux qui, comme les dames, le go-bang, etc., font intervenir l'emploi de deux dimensions. Quant aux quelques *jeux spatiaux* que nous aurons à considérer, ils se ramènent pratiquement à des jeux plans.

I. — Régions.

4. Régions. — L'étude des régions formées dans le plan ou dans l'espace est une importante question de Géométrie de situation qui est à la base du problème des quatre couleurs. A un point de vue un peu particulier, Lucas [44] considère un *système simple* de p droites dont deux ne soient jamais parallèles ni trois concourantes. Il y a S points de concours ou *sommets*, A segments ou *arêtes* dont a finies et α infinies, F régions ou *faces* dont f finies et φ infinies. On a

$$S = \frac{p(p-1)}{2}, \qquad A = p^2, \qquad F = \frac{p^2+p+2}{2}.$$

Ceci s'étend à des groupes de droites parallèles ou concourantes en appelant G_K le nombre de groupes de K droites parallèles et S_K le nombre des points de concours de K droites, on a en particulier

$$\frac{p(p-1)}{2} = S_2 + 3S_3 + \ldots + \frac{K(K-1)}{2}S_K + \ldots + G_2 + G_3 + \ldots + \frac{K(K-1)}{2}G_K + \ldots$$

Avec q points tels que trois ne soient pas en ligne droite, mais que quatre d'entre eux soient sur deux droites parallèles, on a

$$F = \frac{1}{8}(q-1)(q^3 - 5q^2 + 18q - 8).$$

Steiner [*L.*, IV, p. 162] a montré que n cercles donnent $n^2 - n + 2$ régions au plus. Avec n systèmes de circonférences, on a au plus $1 + 2\Sigma c_i c$ régions. Enfin, pour ces mêmes cercles et m systèmes de parallèles aux nombres respectifs de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, le nombre maximum des régions est

$$1 + \Sigma a_i + \Sigma a_i a_j + 2(\Sigma a_i)(\Sigma c) + 2\Sigma c_i c_j$$

avec au plus $2\Sigma a_i a_j$ régions illimitées. Si l'on ajoute α droites et γ cercles quelconques, ce nombre augmente de $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \gamma(\gamma - 1)$. Hendlé a considéré [43] de façon encore plus générale le nombre maximum de régions délimitées par n coniques, ce qui correspond au cas de coniques dégénérées : $2n^2 + n + 1$. De même pour des quadriques on se ramène au cas de n couples de plans

$$4n + \frac{(2n+3)(2n-1)(n-1)}{3} \quad \frac{4n^3 + 5n + 3}{3}.$$

5. **Problème des aspects.** — Considérons avec Laisant [46] et Perrin [52] le *problème des aspects* en partant de n points d'un plan que nous appellerons des *sommets*. Des divers points de ce plan, on les voit dans un ordre qui dépend du point de vue. En désignant par $m = \frac{n(n-1)}{2}$ le nombre des droites qui les joignent deux à deux, ces droites se recoupent en

$$N = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3)$$

autres points ou *nœuds* et partagent le plan en

$$\rho_0 = \frac{1}{8}(n-1)(n^3 - 5n^2 + 18n - 8)$$

régions dont $n(n-1)$ illimitées et $\frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 4)$ limitées. Chaque droite comprend $n-2$ segments intérieurs et 2 segments extérieurs illimités. Les N nœuds se décomposent en δ nœuds extérieurs provenant de deux segments extérieurs, δ' nœuds intérieurs provenant de deux segments intérieurs et δ'' nœuds mixtes.

Dans chacune des F régions on a le même *aspect*, c'est-à-dire que la permutation des n sommets est la même, mais F n'est qu'une limite supérieure du nombre des aspects distincts et pour avoir le nombre exact il faudrait supprimer tous les segments intérieurs, voir quelle est la réduction que subit ρ_0. Perrin a montré que si l'on efface s' segments, ce qui fait disparaître d' nœuds et isole σ sommets ou groupes de sommets, le nombre des régions qui restent est

$$\rho = \rho_0 - s' - d' + \sigma = 1 + s + d + \sigma - n.$$

Si l'on supprime seulement des segments intérieurs, on a

$$s = n(n-1) \qquad d = \delta, \qquad \text{et} \qquad \sigma = 0,$$

le nombre cherché est $R = (n-1)^2 + \delta$. En supprimant les segments extérieurs, on aurait

$$S = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad d = \delta' \qquad \text{et} \qquad \sigma = 1 \qquad \text{avec} \quad R' = \frac{n^2-3n+4}{2} + \delta'.$$

L'auteur se demande si l'on peut avoir des limites de variation de δ et δ' quand les n sommets varient. Il n'y a de changements que si l'un des sommets P vient à traverser une des droites joignant deux autres sommets A, A'. S'il y a p sommets du même côté de AA' que P et $p' = n - p - 3$ (d'où $p - p' = 2p - n + 3$) de l'autre côté, cette traversée augmente δ de $2(p-p')$, δ' de $(p-p')$ et le nombre des nœuds mixtes de $-3(p-p')$ dans le cas où P passe entre A et A'. S'il n'en est pas ainsi il faut intervertir p et p' dans les résultats.

Par exemple, pour un polygone convexe, en désignant par ε la somme des quantités $p - p'$ à chaque traversée, on trouve :

$$R = \frac{1}{12}(n-1)(n^3 - 5n^2 + 18n - 12) - 2\varepsilon,$$
$$R' = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 48) - \varepsilon,$$

d'où $R - 2R' = n - 3$. L'entier ε toujours positif, sauf pour un polygone convexe, est caractéristique de la position considérée. Si $\varepsilon = o$ on a une limite supérieure $\frac{1}{3}(2p - n + 1)$.

Perrin établit encore que : *Une droite quelconque rencontre au plus deux régions distinctes donnant un même aspect déterminé et dans ce cas tous les sommets sont situés d'un même côté de cette droite.* Il justifie que, si grand que soit n, il y a toujours au moins deux régions distinctes donnant le même aspect.

A ces questions se rattache la recherche du maximum réel, nul pour un polygone convexe, du nombre des points de rencontre d'un segment intérieur avec un segment extérieur. Une limite supérieure est

$$\frac{1}{8}(n-3)(n^3-3n^2-10n+48).$$

6. Cas de l'espace. — Laisant [46] considère le cas de n plans qui donnent $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ régions dont $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ limitées et n^2-n+2 illimitées.

Si p plans passent par un même point le nombre des régions diminue de $\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)$; s'ils passent par une même droite, il diminue de $\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)$.... L'étude des régions limitées sur une sphère par des arcs de grand cercle se ramène à celle des régions limitées découpées par des plans dans l'espace.

Signalons encore (*L.*, IV, p. 165) que le nombre des régions formées par des familles de $p_1, p_2, \ldots, p_i$ plans parallèles entre eux de chaque famille est

$$R = 1 + \Sigma p_i + \Sigma p_i p_j + \Sigma p_i p_j p_k$$

dont $R' = 2\Sigma p_i p_j + 2$ sont illimités.

Si l'on y ajoute un plan quelconque, le nombre maximum des régions est

$$R + \frac{m(m+1)}{2}\Sigma p_i + m\Sigma p_i p_j + \frac{m^3+5m}{6};$$

le nombre des régions illimitées est

$$R' + 2m\Sigma p_i + m(m-1).$$

Si, à ce même système de plans parallèles, on ajoute des familles de $s_1, s_2, \ldots, s_i$ sphères concentriques, on trouve

$$R + 2\Sigma p_i \Sigma s_i s_j + 2\Sigma p_i p_j \Sigma s_i + 2\Sigma s_i + 2\Sigma s_i s_j s_k,$$

R' n'ayant pas changé.

Enfin n plans et n sphères donnent en général

$$mn(n-1) + \frac{1}{6}(n^3+5n+6) + \frac{1}{3}(m^3-3m^2+8m)$$

avec $2n^2-2n+2$ régions illimitées.

7. Polyèdres convexes. — De toutes les dispositions que l'on considère dans l'espace, la plus fréquemment envisagée est celle que forme un polyèdre convexe avec ses F faces, ses S sommets et ses A arêtes. On connaît la célèbre formule de Descartes [40] attribuée souvent à Euler [41] : $F + S = A + 2$ et dont on connaît un grand nombre de démonstrations, dont la plus classique est due à Cauchy [38, 42].

D'après les propriétés des réseaux, l'*indice* (*M.*, p. 11) est ici

$$a - s + 1 = f = F - 1.$$

Il y a f *cycles* linéairement indépendants. Les $F - 1$ régions indépendantes sont $F - 1$ faces quelconques.

En désignant par F_p le nombre des faces à p arêtes et par S_p celui des sommets de *degré p* [*M.*, p. 3] on a les formules fondamentales

$$F = F_3 + F_4 + \ldots + F_p + \ldots, \qquad S = S_3 + S_4 + \ldots + S_p + \ldots$$
$$2A = 3F_3 + 4F_4 + \ldots + pF_p + \ldots = 3S_3 + 4S_4 + \ldots + pS_p + \ldots$$

On appelle *faces paires* ou *impaires* celles qui ont un nombre pair ou impair d'arêtes et *sommets pairs* ou *impairs* ceux dont le degré est pair ou impair. Les faces impaires, ainsi que les sommets impairs, sont en nombre pair.

La formule de Descartes peut s'écrire :

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 = F_7 + 2F_8 + 3F_9 + \ldots + 2S_4 + 4S_5 + 6S_6 + \ldots + 12,$$
$$3S_3 + 2S_4 + S_5 = S_7 + 2S_8 + 3S_9 + \ldots + 2F_4 + 4F_5 + 6F_6 + \ldots + 12;$$

on en déduit en particulier : $3F_3 + 2F_4 + F_5 \geqq 12$. Donc il y a au moins quatre faces de moins de six côtés.

8. **Cols et vallées.** — Cayley et Maxwell [38, 49, 53] ont étudié les configurations physiques d'une contrée et établi une relation entre les nombres de montagnes, de vallées, de cols, etc.

Une carte étant tracée en courbes de niveaux, on y voit les *sommets* des montagnes, les *fonds* des dépressions, les *cols*, points doubles réels ou points multiples d'une courbe de niveau. Ce sont des *défilés* s'ils proviennent de la jonction de deux courbes de niveau contenant à leur intérieur des régions en élévation, des *fourches* si elles sont en dépression. Si $n + 1$ régions se réunissent en une seule en donnant un point multiple d'ordre n, il faut le considérer comme formé de n défilés ou fourches différents. Les *thalwegs* sont des lignes de réunion des eaux, *les lignes de faîte* des lignes de partage des eaux.

Soient M le nombre des *montagnes*, donc des sommets; V celui des *vallées*, donc des fonds. Si enfin on désigne par D_1, D_2, ... le nombre des défilés simples, doubles, etc.; F_1, F_2, ... celui des fourches simples, doubles, etc.; L et W celui des lignes de faîte et des thalwegs, on a

$$M = 1 + D_1 + 2D_2 + \ldots, \qquad V = 1 + F_1 + F_2 + \ldots,$$
$$L = W = 2(D_1 + F_1) + 3(D_2 + F_2) + \ldots.$$

9. Cartes géographiques. — Une carte géographique est formée de F pays, contrées ou *régions* que nous appellerons aussi des *faces* comme pour les polyèdres, car les deux cas, sous réserve de quelques singularités [45], sont identiques du point de vue de l'*Analysis situs*. Ces faces sont séparées par A *frontières*, chemins ou *arêtes*. Les S points où se rejoignent un certain nombre d'arêtes sont les carrefours ou *sommets*.

Deux faces qui ont au moins une arête commune sont dites limitrophes, voisines, tangentes ou encore *adjacentes*.

Nous considérerons souvent une carte comme un *réseau sphérique* [*M.*, p. 6]. Nous appellerons *réseau cubique* [*M.*, p. 5] une carte dans laquelle les sommets sont de degré 3, *ordre* [*M.*, p. 5] d'une carte le nombre de ses sommets, etc.

Le problème fondamental que nous allons examiner dans les chapitres suivants est celui de savoir quel est le *nombre chromatique* [4] de la carte, c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs nécessaires pour la colorier. La carte sera dite *bichrome*, *trichrome*, *tétachrome*, etc., suivant que ce nombre sera 2, 3, 4, ...

10. Si l'on examine les singularités que peut représenter une carte, on constate qu'on peut les négliger. Par exemple, une *île* est une région ou un ensemble de régions entouré par une seule région R. Si p est le nombre chromatique de l'île et de R, et q celui du reste de la carte et de R, le plus grand des deux nombres p et q est le nombre chromatique cherché. De même, une *péninsule* est une partie de la carte se rattachant au reste par une seule région R', elle-même adjacente par deux arêtes non consécutives à une même région R. Si p et q sont les nombres chromatiques pour la péninsule y compris R et R', et pour le reste y compris R et R', le plus grand des deux nombres p et q conviendra. Il ne reste finalement que des régions assimilables aux faces d'un polyèdre.

Si l'on transforme d'ailleurs par inversion une carte avec un pôle non situé sur une arête, on obtient une carte sphérique et inversement. Nous appellerons *mer* la face dans laquelle est le pôle. Elle correspond dans une carte plane à la zone infinie qui entoure la carte. Toute face de la carte peut être considérée comme étant la mer.

Lorsqu'on tient à mettre en évidence une mer, au lieu des notations A, S, F et de la formule $A + 2 = S + F$ (7), on emploie les notations a, s, f ($a = A, s = S, f = F - 1$) et la formule $a + 1 = s + f$.

Bien des questions autres que celles que nous examinerons pourraient être soulevées ici. Si, par exemple, on envisage sur chaque face un sens positif de rotation avec correspondance des sens pour des faces adjacentes, on est amené à l'étude des surfacss à un côté ou à deux côtés [4]. Signalons aussi la très difficile recherche des polyèdres que l'on peut construire avec des faces polygonales données [4].

11. Notations d'une carte. — Il est possible, comme pour un réseau quelconque [54], de représenter par une notation convenable les faces d'une carte. Désignons chacune des faces par une lettre et dressons un tableau à double entrée dans lequel chaque ligne et aussi chaque colonne correspondent à une des F faces. Si deux faces P et Q sont adjacentes, on l'indiquera par un signe dans la case commune à la ligne P et à la colonne Q.

On peut aussi se borner à donner la liste de toutes les connexions. C'est ainsi qu'un tétraèdre régulier de faces A, B, C, D sera représenté par AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Il ne faudrait pas croire qu'une telle liste donnée au hasard convienne. Considérons, par exemple, pour plus de précision, le cas essentiel pour la suite (17) d'un réseau cubique (9). S'il y a dans le tableau la connexion RS, il faudra trouver deux régions T, U et deux seulement touchant à la fois R et S, ce qui donne RT, ST, RU, SU. Les sommets cubiques RST, RSU sont ainsi en évidence.

Notons encore que si une face R est, par exemple, entre les faces S, T, U, V, W et Z, on devra trouver une liste de connexions les utilisant toutes, par exemple, ST, TU, UV, VW, WZ, ZS qui convient et non pas ST, TU, US et VW, WZ, ZV.

12. Notations de Veblen. — Veblen [100] a proposé de représenter un réseau par deux tableaux à double entrée. Reprenons, par exemple, un réseau cubique pour lequel (7) $A = 3n$, $S = 2n$ et $F = n + 2$. Dans un premier tableau, les $3n$ colonnes correspondront aux arêtes et les $2n$ lignes aux sommets. Chaque case sera marquée 1 ou 0 suivant que le sommet considéré est ou non sur l'arête. Dans le deuxième tableau, il y a de même $3n$ lignes pour les arêtes et $n + 2$ colonnes pour les faces avec encore des 1 et des 0.

On pourra, par quelques essais, se rendre compte combien ces diverses notations sont peu commodes. La moindre représentation graphique a ici une supériorité écrasante sur la notation algébrique.

II. — Cartes simples.

13. Réseaux réciproques. — Prenons une carte ou un réseau (R) et remplaçons-y chaque région par un *point représentatif* [4, p. 30] ou *capitale*. Si deux faces sont adjacentes, on joint les capitales par un chemin traversant l'arête commune sans en rencontrer d'autres. On forme ainsi un nouveau réseau (R′) *réciproque* du premier, car (R) se déduit de (R′) comme (R′) de (R). Si A', S', F' sont les nombres d'arêtes, de sommets, de faces de (R), on a immédiatement $A' = A$, $S' = F$, $S = F'$, et ceci explique pourquoi dans les formules déjà trouvées (7) S et F jouent des rôles symétriques.

Si (R) est *homogène* [1], ses sommets étant de degré p, les faces de (R′) ont toutes p arêtes.

On sait que le *rang* d'un réseau [*M.*, p. 5] est le nombre minimum de catégories en lesquelles on peut répartir les sommets, deux sommets joints par une arête n'étant pas dans la même catégorie. En répartissant de façon analogue les arêtes, on obtient la *classe* (*M.*, p. 5). Un réseau de rang 2, 3, 4, ... est dit *bipartie, tripartie, tétrapartie.*

En se reportant aux définitions (9, 13), on voit que *le rang d'un réseau est égal au nombre chromatique du réseau réciproque.* Démontrer que tout réseau sphérique est au plus tétrachrome revient donc à démontrer que tout réseau sphérique est au plus tétrapartie.

---

[1] Le mot « homogène », que nous emploierons désormais, a le même sens que le mot « régulier » que nous avons déjà utilisé [*M.*, p. 5] : il désigne un réseau dont tous les sommets ont le même degré. Divers auteurs, et en particulier Errera, emploient déjà le mot « homogène » dans le sens que nous indiquons.

14. Réseaux bichromes. — De là résulte que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une carte soit bichrome est que le réseau réciproque soit bipartie*, c'est-à-dire, comme on le sait [*M.*, p. 34], que toutes ses faces soient paires. Donc une carte bichrome a tous ses sommets pairs.

Parmi les réseaux biparties, considérons les *réseaux losangés* [*M.*, p. 6] dont toutes les faces sont des quadrilatères. Ici, $F = F_4$ et $2A = 4F_4$. Donc $A = 2F$ et $S = F + 2$. Réciproquement, si $F_3 = 0$, on a (7)

$$4F = 4F_4 + 4F_5 + \ldots = 2A = 4F_4 + 5F_5 + \ldots$$

Donc $F_5 = F_6 = \ldots = 0$ et le réseau est losangé.

Les sommets d'un réseau losangé (R) peuvent, suivant la catégorie à laquelle ils appartiennent, être numérotés **1** et **2**. Joignons deux sommets **1** appartenant à une même face par une arête nouvelle formant une diagonale de cette face. On obtient ainsi (ρ), *réseau dérivé* de (R). Si α, σ, φ sont les nombres d'arêtes, de sommets, de faces de (ρ), on a $\alpha = F = \frac{A}{2}$, α étant le nombre des sommets **1** et φ celui des sommets **2**.

Les sommets **2** donnent de même un second réseau dérivé (ρ') qui est réciproque de (ρ). Inversement, deux réseaux réciproques quelconques (ρ) et (ρ') déterminent un réseau losangé et un seul.

Nous allons maintenant étudier quelques cas de réseaux trichromes.

15. Réseaux triangulés. — Ce sont par définition [*M.*, p. 6] des réseaux n'admettant que des faces triangulaires : $F = F_3 = 2n$, $S = n + 2$, $A = 3n$. Les réseaux réciproques sont les réseaux cubiques (**17**). Prenons un réseau triangulé (R) dont tous les sommets soient pairs; on peut établir par récurrence [**57**] qu'il est tripartie. Il en résulte que *tout réseau cubique à faces paires est trichrome*. On a aussi la réciproque : *Tout réseau cubique trichrome est à faces paires*.

Considérons un réseau triangulé (R) dont tous les sommets soient pairs, sauf peut-être un certain sommet ω et les sommets reliés à ω par une arête. En supprimant ω et ces arêtes, on obtient un *polygone triangulé* (P) dans lequel nous distinguerons les *sommets intérieurs* tous pairs, et les *sommets extérieurs* qui étaient primitivement reliés à ω et sont de parité quelconque. Sainte-Laguë [57] a établi que *les sommets extérieurs impairs sont en nombre pair* et que *le nombre des sommets extérieurs pairs est différent de* 1. De là résulte qu'*un réseau triangulé ne peut avoir seulement deux sommets impairs reliés par une arête.*

On peut décomposer un polygone triangulé (P) en faces quadrilatères si les sommets extérieurs sont en nombre pair, sinon c'est le réseau triangulé (R) qui peut être ainsi décomposé.

Un réseau triangulé (R) qui a au moins un sommet impair n'est pas tripartie. Par contre, on peut établir que : *un polygone triangulé est tripartie.* En passant au réseau réciproque (**13**), on peut dire que : *est trichrome un réseau dont tous les sommets sont de degré* 3, *sauf peut-être un point singulier θ et dont toutes les faces sont paires, sauf peut-être celles qui touchent θ.* Un tel réseau trichrome n'a qu'un seul mode de coloriage possible.

16. De tout réseau trichrome (R), on déduit immédiatement un réseau cubique tétrachrome (R′) en y mettant des *pièces* [*L.*, IV, p. 178], c'est-à-dire en remplaçant tout sommet P par une face formée, par exemple, d'un cercle de rayon très petit, de centre P. Le réseau (R) étant coloré avec trois couleurs a, b, c, les pièces de (R′) recevront une quatrième couleur d. Le réseau (R′) n'est pas un réseau cubique quelconque, et en particulier si l'on a trouvé dans le réseau une seule face impaire, c'est-à-dire une pièce, on en déduit immédiatement l'emplacement de toutes les autres pièces de (R′).

On peut aussi déduire de (R) un réseau cubique tétrachrome (R′) en mettant des pièces seulement sur les sommets de degré supérieur à 3.

17. Réseaux cubiques. — L'introduction de *pièces* transforme tout réseau (R) en réseau cubique (R′). Le théorème empirique des quatre couleurs (**18**) dit que le nombre chromatique d'un réseau est au plus égal à 4. Il en serait donc de même pour un réseau cubique. C'est pourquoi tous les efforts faits pour établir cette propriété l'ont été très légitimement sur de tels réseaux. Mais si ce théorème est faux, (R) pourrait être tétrachrome sans qu'il en soit de même de (R′).

Notons qu'à cause de leur origine les réseaux cubiques que nous étudions ici ne peuvent avoir d'*isthmes* [*M.*, p. 5].

La méthode qui précède augmente les nombres A, F, S (7) du réseau (R), mais on peut (*E.*, p. 35] transformer (R) en un réseau cubique (R″) sans changer F en supprimant dans chacune des pièces de (R′) une des arêtes.

Pour tout réseau cubique, on a les formules fondamentales

$$A = 3n, \qquad S = 2n, \qquad F = n + 2$$

et aussi (7) :

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 = 12 + F_7 + 2F_8 + 3F_9 + \ldots,$$
$$\frac{3S}{2} = 3n = 6 + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + 4F_7 + \ldots.$$

Indiquons enfin la propriété suivante : *Tout réseau cubique est au plus tétrapartie*, ou, en envisageant le réseau réciproque : *Tout réseau triangulé est au plus tétrachrome.*

III. — Théorème des quatre couleurs.

18. Historique. — Le *théorème des quatre couleurs* ou *théorème de Guthrie*, d'après lequel une carte est coloriable avec au plus quatre couleurs, deux régions adjacentes ayant des couleurs distinctes, est sans doute connu depuis longtemps.

La première mention imprimée que l'on connaisse pour ce théorème est celle de Cayley, qui, en 1878 [66], attribue cet énoncé à de Morgan; mais Frédéric Guthrie prétendit en 1880 [74] que son frère Francis Guthrie en avait donné une démonstration 30 ans plus tôt.

Pendant longtemps on a tenu pour exactes des démonstrations souvent différentes, mais toutes fausses. C'est ainsi que Kempe en publia une en 1879 [77], et Tait en donna deux autres en 1880 [93]. Nous reviendrons plus loin sur le raisonnement de Kempe (28) et sur ce que nous appellerons le *théorème de Tait* (19), qui est un énoncé équivalent à celui du *théorème de Guthrie*. Mais actuellement les deux théorèmes paraissent aussi difficiles à justifier l'un que l'autre. Petersen a montré [88] que le théorème de Tait est inexact pour des réseaux non sphériques, mais c'est Heawood qui, le premier, en 1890, établit l'erreur du raisonnement de Kempe [98].

Rien d'ailleurs ne prouve que ces théorèmes soient exacts, et

Petersen [88] dit à ce sujet : « Je ne sais rien avec certitude, seulement s'il fallait gager, je tiendrai que le théorème de Guthrie n'est pas exact. » Il y aurait dans ce cas des cartes, avec probablement un très grand nombre de régions (40) pour lesquelles il faudrait cinq couleurs (20).

19. **Théorème de Tait.** — Étant bien entendu qu'il ne s'agit ici que de réseaux sphériques (9) sans isthmes (17), le théorème de Guthrie peut s'énoncer : *Tout réseau est tétrachrome au plus.* En se bornant, comme on peut le faire (17) aux réseaux cubiques, on peut dire aussi : *Tout réseau cubique est tétrachrome au plus.* La considération de la carte réciproque conduit à un énoncé équivalent : *Tout réseau est tétrapartie au plus.*

Au lieu de numéroter les faces ou les sommets, on peut numéroter les arêtes. Le théorème de Guthrie est, en effet, identique au suivant que nous appellerons le *théorème de Tait : Tout réseau cubique est de classe* 3. Notons d'abord que la classe ne peut être inférieure à 3 et ensuite qu'un tel réseau est au moins trichrome. Dans ce cas, a, b, c étant les couleurs utilisées, on numérotera respectivement 1, 2, 3 les chemins séparant deux couleurs a, b ou a, c ou b, c. Si le réseau utilise quatre couleurs a, b, c, d, on mettra 1 pour séparer a et b ou c et d, 2 pour a et c ou b et d et 3 pour a et d ou b et c. Aucune contradiction ne peut résulter de ce numérotage.

Réciproquement, considérons un réseau cubique dont les chemins soient répartis en trois classes 1, 2, 3. Mettons la couleur a dans une région quelconque, et de proche en proche colorions les autres en respectant la règle précédente : la traversée de 1 remplace a par b ou b par a, c par d ou d par c, et ainsi de suite. Ici encore le coloriage avec a, b, c, d est possible sans contradiction.

20. **Réseaux pentachromes.** — Si le théorème des quatre couleurs est inexact pour certaines cartes, on peut établir les nouveaux énoncés équivalents : *Tout réseau est pentachrome au plus. Tout réseau cubique est de classe* 4 *au plus* et aussi *Tout réseau est pentapartie au plus.*

Prenons, par exemple, le premier et considérons un réseau cubique, cas auquel on peut toujours se ramener (17). Procédons par récurrence en considérant un réseau de F faces, tout réseau ayant moins de faces étant supposé pentachrome au plus. Il y a dans ce réseau au moins une face de 3, 4 ou 5 côtés (7). Le cas le plus compliqué est celui où il y a des faces pentagonales. Soit P l'une d'elles : ABCDE. La suppression d'une arête AB donne une carte coloriable avec cinq couleurs. Si l'on rétablit AB, le seul cas difficile est celui où les cinq couleurs a, b, c, d, e sont utilisées pour les cinq faces adjacentes, par exemple, dans cet ordre.

21. Introduisons maintenant la notion de *chaîne* due à Kempe (28). Une chaîne de Kempe, a-b, par exemple, sera la succession des chaînes que forment les régions adjacentes deux à deux et coloriées a ou b. Il peut arriver qu'une chaîne ne comprenne qu'une région, ou qu'elle ait des bifurcations plus ou moins nombreuses, dessinant en quelque sorte un arbre [*M.*, p. 5]. Il faut noter que : *Deux chaînes telles que a-b et c-d ne peuvent se traverser* et que : *Dans une chaîne a-b, on peut échanger les couleurs a et b*, c'est-à-dire effectuer une *transposition* de couleurs.

Revenons au pentagone P et considérons la chaîne a-c qui part de la région Q de couleur a, adjacente à P, et qui peut, dans certains cas, comprendre la région R de couleur c, également adjacente à P. Si cette chaîne issue de Q ne comprend pas R, on y fait la transposition a-c et alors P n'étant plus entouré que de quatre couleurs b, c, d, e est coloriable avec la cinquième.

Si la chaîne a-c réunit Q à R, considérons la chaîne b-d qui part de la région S de couleur b, adjacente à P. Comme elle ne peut pas traverser la précédente, faisons-y la transposition b-d, ce qui nous ramène au cas où il n'y a autour de P que quatre couleurs a, d, c.

Toute carte étant ainsi pentachrome au plus, on en déduira que la classe ne dépasse pas 4. Partons d'une arête AB et supposons, en effet, que les arêtes qui arrivent en A soient numérotées 1, 2 et celles qui arrivent en B, 3 et 4. De même que nous avons utilisé des *chaînes de Kempe* formées de régions a, b qui ne peuvent être traversées par une chaîne c-d et dans lesquelles on peut transposer a et b, introduisons ici une *chaîne de Tait* formée d'arêtes 1, 2 qui ne peut être traversée par une chaîne 3-4 et dans laquelle on peut transposer 1 et 2. Notons en passant que *la frontière d'une chaîne de Kempe est une chaîne de Tait.*

Ici, les chaînes 1-3 et 2-4, en supposant que 1 et 4 soient d'un même côté de AB, ne peuvent exister simultanément. L'une d'elles, 1-3, partant de A, ne peut aboutir à B; on y transpose 1 et 3, le numéro 1 reste disponible pour AB.

22. **Théorème de Petersen.** — Petersen a établi un théorème remarquable [26], qui, en se bornant aux réseaux sans isthmes, peut s'énoncer : *Les chemins d'un réseau cubique peuvent toujours être répartis en deux catégories de telle façon qu'à chaque sommet aboutisse un chemin de la première catégorie et deux de la deuxième.* On considère habituellement comme *rouges* les chemins de la première catégorie et comme *bleus* ceux deux fois plus nombreux de la seconde.

Si l'on supprime dans (R) tous les chemins rouges, on voit que les bleus forment des circuits fermés ou *circuits bleus*. Donnons le numéro 1 à tous les chemins rouges, et dans chaque circuit bleu, numérotons alternativement les arêtes 2 et 3 en utilisant le numéro 4 une fois par circuit bleu impair. On a par cela même établi à nouveau que le réseau est de classe 4.

Admettre le théorème de Tait reviendrait à compléter comme suit le théorème de Petersen : *La répartition des chemins en bleus ou rouges peut être faite de telle façon que tous les circuits bleus soient pairs.*

Partons d'un sommet M quelconque et suivons une *chaîne alternative*, c'est-à-dire dont les arêtes soient alternativement rouges et bleues, en commençant par le chemin rouge de M [*M.*, p. 27]. Une arête quelconque du réseau est alors parcourue par une ou plusieurs de ces chaînes. Mais il peut arriver qu'elle le soit toujours dans le même sens, auquel cas c'est un *chemin unicursal* ou dans les deux sens, et c'est alors un *chemin bicursal.* On établit que [90], ou bien tous les chemins sont unicursaux, ou bien ils sont bicursaux, à l'exception des trois chemins issus de M. Dans le premier cas, tous les circuits sont pairs, le réseau est bipartie, donc trichrome (15). On dit que le réseau est *bicubique* [*M.*, p. 24]. Dans le second cas qui reste seul à considérer, il est dit *bicursal.*

23. **Réseaux minima.** — Une des méthodes auxquelles l'on a songé pour établir le théorème de Guthrie est celle qui consiste à étudier les propriétés que devraient avoir les réseaux pentachromes, en envi-

sageant les *réseaux minima* qui, par définition, sont pentachromes et de classe 4, mais tels que tout réseau ayant moins de faces soit tétrachrome. De tels réseaux, s'ils existent, ont le même nombre de faces et sont en nombre fini. Soit (R) l'un d'entre eux.

Le réseau minimum (R) *peut être numéroté avec trois numéros, à l'exception de deux arêtes arrivant aux deux extrémités d'une arête choisie d'avance* [90]. Soient, en effet, AB cette arête et AC, BD deux chemins également choisis d'avance situés, à volonté, d'un même côté de AB, ou, de part et d'autre. Supprimons dans (R) l'arête AB, ce qui diminue de trois le nombre des arêtes et donne un réseau (R′) de classe 3 que nous numéroterons 1, 2, 3. Il serait facile d'éliminer le cas où (R′) admettrait un isthme. Il ne reste plus qu'à rétablir maintenant AB auquel nous donnons celui des numéros 1, 2, 3, qui est disponible et à mettre le numéro 0 à AC et BD.

24. **Méthode de Veblen.** — A la classification, donnée par Petersen, des chemins en rouges et bleus, se rattache la méthode de coloriage trichrome de Veblen [99]. Tout chemin rouge étant affecté de l'indice 0, et tout chemin bleu de l'indice 1, il envisage diverses congruences de modules 2, telles que la somme des indices de chaque sommet est congrue à zéro. L'auteur en déduit la théorie des *cycles* [*M.*, p. 12] et la formule de Descartes (7).

Il montre aussi que colorier les F faces avec quatre couleurs revient à trouver un système de F solutions pour un système d'équations linéaires. Enfin l'auteur associe à tout système de F solutions un point défini par ses coordonnées dans l'espace à F dimensions. Il est aussi amené de façon un peu analogue à Heawood (25) à chercher un système de solutions dans lequel aucune des inconnues ne soit nulle.

IV. — Chaines.

25. **Indices de Heawood.** — Aux divers énoncés que l'on peut donner du théorème des quatre couleurs, on peut en ajouter un nouveau dû à Heawood et concernant un réseau cubique dont nous supposons les chemins numérotés 1, 2, 3 (19). En un sommet P arrivent trois arêtes, qui, lues dans l'ordre 1, 2, 3, donnent le sens trigonométrique, et alors P est affecté de l'*indice* 1 ou le sens inverse, et

alors il est marqué -1. En parcourant le pourtour de chaque face dans le sens trigonométrique, on verra que la somme des indices rencontrés est congrue à zéro, ou en abrégé est nulle, suivant le module 3.

On sait que tout chemin 1 sépare les couleurs a, b ou c, d, 2 sépare a, c ou b, d et 3 sépare a, d ou b, c (19). Autour d'un sommet d'indice 1, on trouvera alors en tournant dans le sens trigonométrique abd, bac, cdb ou dca et autour d'un sommet -1, on aura les dispositions inverses. De là résulte que [98] si chaque région est une *face triple*, c'est-à-dire dont le nombre des arêtes est divisible par 3, la carte est tétrachrome, car on peut mettre 1 ou -1 à tous les sommets, ce qui revient à répartir circulairement les couleurs suivant l'ordre indiqué plus haut.

26. **Faces triples.** — Heawood s'est demandé comment *tripler* les faces qui ne le sont pas et par là rendre la carte coloriable. Si, par exemple, on remplace un sommet cubique du réseau par un triangle, ce qui revient à faire une troncature sur le polyèdre correspondant à ce réseau, on augmente d'une unité le nombre des arêtes des trois faces qui entourent ce sommet. Un nouvel énoncé du théorème de Guthrie est alors le suivant : *Il est possible par des troncatures triangulaires de remplacer toutes les faces d'un polyèdre par des faces triples.*

Introduisons les *chaînes en zigzag* de Heawood, formées avec des arêtes du réseau et laissant alternativement à droite et à gauche les arêtes non utilisées. En remplaçant chacun des sommets d'une telle chaîne par des triangles, on ne modifie que la triplicité des faces adjacentes à cette chaîne. D'autre part, Heawood considère des circuits de Tait fermés n'utilisant que des chemins. S'il part d'un tel circuit s chemins vers l'intérieur et t vers l'extérieur, il montre que, si Σr est la somme des nombres r de côtés des diverses faces entourées par le circuit, $\Sigma r - (s - t)$ est congrue à zéro par rapport au module 6, donc aussi au module 3. En considérant ce nombre $s - t$, l'auteur cherche l'effet que produit sur un réseau le remplacement par des triangles des sommets d'une chaîne en zigzag tracée dans une *région triple*, c'est-à-dire dont toutes les faces sont triples.

Il est amené ainsi à examiner ce qui se passe lorsque diverses chaînes en zigzag traversent un circuit fermé C en empruntant à chaque fois un de ses chemins et qu'on le modifie en introduisant des triangles à chaque sommet de C.

27. **Étude analytique.** — Heawood reprend encore cette étude sous une forme analytique, identique au fond à la précédente et analogue à ce que fait Veblen (24). Il affecte chaque sommet d'un indice entier x_i, qui, par rapport au module 3, est ± 1 ou 0 et écrit que pour chaque face la somme doit être congrue à zéro. On obtient autant qu'on le veut de solutions 1, -1 ou 0. Mais si l'on se reporte à ce que nous avons appelé les *indices* de Heawood (25), on voit qu'il y a une importante restriction : ce système de $F = n + 2$ congruences à $S = 2n$ inconnues doit être vérifié par des valeurs de x toutes différentes de zéro. Il est donc nécessaire, mais non suffisant, qu'aucune combinaison linéaire ne puisse éliminer toutes les variables, sauf une.

Heawood fait remarquer que les cas difficiles pour lesquels il n'a pu terminer l'étude sont analogues à ceux qu'a rencontré Kempe et que nous allons considérer maintenant.

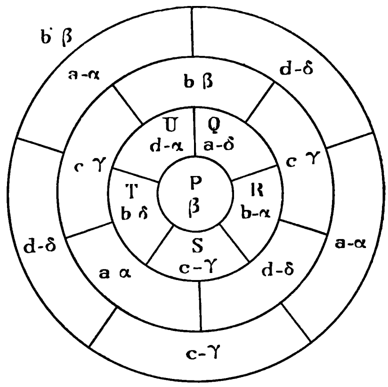
28. **Cas irréductible de Kempe.** — Considérons une carte de F régions dont nous voulons démontrer par récurrence qu'elle est tétrachrome, toute carte ayant moins de régions l'étant par hypothèse. Le seul cas difficile (36) est celui où l'on ne trouve ni triangles, ni quadrilatères, mais seulement des pentagones. Soit P l'un deux (¹). Il est entouré par cinq faces Q, R, S, T, U (*fig.* 1, p. 20), coloriées respectivement avec quatre couleurs que l'on peut supposer dans l'ordre a, b, c, b, d.

Kempe considère la chaîne a-c (21) qui part de Q. Si elle n'atteint pas S, on y transpose (21) a et c et le coloriage de P devient possible. Si elle atteint S, on considère la chaîne qui part de U. Le seul cas défavorable est celui où les deux chaînes a-c et c-d existent. On considère alors la chaîne b-d partant de R et ainsi de suite. On arrive ainsi parfois à un cas irréductible, que Kempe n'avait pas vu, lorsque les deux chaînes a-c allant de Q à S et c-d allant de S à U existent simultanément et ont en commun au moins une région c autre que S.

(¹) La figure représente un réseau particulier, mais le raisonnement est absolument général.

Heawood a montré le premier la possibilité d'avoir un tel cas et l'on en a un exemple en considérant le *premier réseau d'Errera* [97] (*fig.* 1, p. 20). Ce réseau est cependant tétrachrome, les lettres α, β, γ, δ indiquant ici un coloriage possible.

Fig. 1.



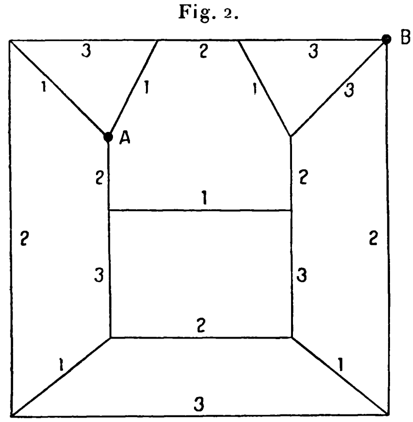
Errera a approfondi cette question [97]. Dans le cas irréductible de Kempe, effectuons la transposition $b - d$ pour la chaîne qui part de R sans aboutir à U : on obtient la nouvelle disposition a, d, c, b, d, autour de P. Aux notations près, elle est identique à la précédente après une rotation de 144°. En continuant ainsi, ou bien on a des cas réductibles, ou bien on retrouve la disposition primitive des couleurs, comme ici, où il faut 20 transpositions successives pour retrouver le réseau primitif, de sorte que cette méthode, contrairement à ce que l'on aurait pu croire, ne permet pas de démontrer le théorème de Guthrie.

29. **Collisions.** — Dans le cas précédent, il n'est pas possible, en partant du coloriage essayé au début, de colorier le pentagone central sans *collisions*, c'est-à-dire sans que deux faces adjacentes aient la même couleur. On peut d'ailleurs admettre des collisions et en déduire par des retouches un coloriage possible. s'il y en a un.

Pour donner un exemple de cette méthode, prenons un réseau dont les arêtes soient numérotées 1, 2, 3. On établit d'abord qu'il ne peut pas y avoir une seule collision.

S'il y a deux collisions en A et B, il existe des chaînes de Tait 1-2, 2-3, 3-1 dont l'une au moins va de A à B et si l'on y fait la transposition des deux numéros, on peut espérer rétablir un numérotage correct. Mais il n'en est malheureusement pas toujours ainsi comme on s'en convaincra avec un réseau particulier (*fig.* 2, p. 21). Ce réseau

Fig. 2.



est cependant tétrachrome comme on le voit en considérant la chaîne 2-3 qui va de A en B et y transposant 2 et 3. Puis dans le nouveau réseau transposant 1 et 2 dans la chaîne qui va de A à B.

30. **Chaînes de Tait.** — Sainte-Laguë a étudié ce qui se passe lorsqu'on coupe les chaînes de Tait d'un réseau (R) par un contour quelconque C ne contenant aucune arête ou sommet de (R) et ne rencontrant que deux arêtes de toute face traversée. Un tel contour C est ce que nous appellerons plus tard un *anneau de régions* (33). Prenons par exemple toutes les chaînes 2-3 de (R) qui seront les *chaînes de première classe* et qui, soit dit en passant, sont les circuits bleus de Petersen (22). Certaines coupent C et le nombre des chemins 2 et 3, ainsi rencontrés est pair. Comme il en est de même pour les chemins 1 et 2, ou 1 et 3, on voit que si α, β, γ, sont les nombres respectifs de chemins 1, 2, 3 coupés par C, ou bien α, β, γ sont tous pairs et alors C rencontre un nombre total pair de chemins, ou bien ils sont tous impairs et C en coupe un nombre total impair.

Au lieu d'un circuit fermé C, considérons maintenant deux régions P et Q, que l'on peut remplacer par leurs *capitales* A, B (13) et deux circuits ouverts AMB, ANB allant de A en B. On verra qu'il y a deux catégories de circuits allant de A à B : 1° ceux pour lesquels α, β, γ sont tous trois impairs ou deux pairs et un impair : P et Q sont alors de *parité* différente; 2° ceux pour lesquels α, β, γ sont tous trois pairs, ou deux impairs et un pair : P et P sont de même parité. Si P est de couleur a, les faces de même parité ont la même teinte. Les faces de parité différente ont une des teintes b, c, d.

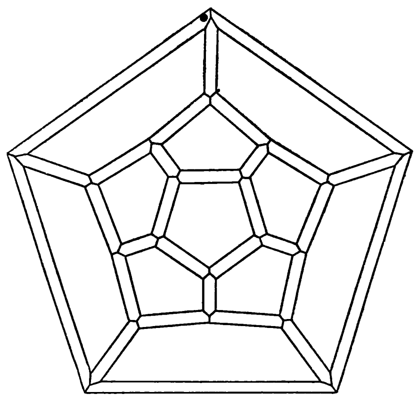
31. **Régions blanches ou noires.** — Considérons comme *blanches* toutes les faces de couleurs a ou b et *noires* les autres faces [107]. On passe d'une région blanche à une blanche ou d'une noire à une noire dans les cas simples en traversant zéro chemin, ou un chemin 1, ou un chemin 2 et un chemin 3; les autres cas s'en déduisant par juxtaposition des précédents ou par addition d'un nombre pair quelconque de traversées de chemins 1, 2 ou 3. On passe de même dans les cas simples d'une région blanche à une noire en traversant 2 ou 3, ou 1 et 2, ou enfin 1 et 3, les autres cas s'en déduisant. Si l'on considère chaque traversée de 1 comme une *permanence*, et de 2 ou 3 comme une *variation*, la règle ci-dessus est au fond la règle des signes, dans laquelle 1 serait + et 2 ou 3 seraient —.

Revenons aux circuits bleus de Petersen (22), formés des arêtes 2 et 3. Les chemins rouges ou arêtes 1 sont positifs et correspondent à des permanences, les bleus sont négatifs et correspondent à des variations. Donc, entre deux circuits bleus la teinte est la même et change à chaque traversée. La frontière d'une chaîne de Kempe étant une chaîne de Tait (21), les zones blanches (ou noires) seront ici des chaînes de Kempe, formées de régions a, b (ou c, d).

32. **Chaînes mixtes.** — Aux diverses chaînes qui précèdent, on peut en rajouter d'autres assez différentes. Franklin a donné, comme nous le dirons plus loin (38, 42), un exemple d'un réseau qui se déduit (*fig.* 3, p. 23), d'un dodécaèdre régulier par substitution à toute arête d'une face hexagonale. Cette méthode, appliquée à un réseau cubique (R) quelconque, le transforme en un réseau (R′) qui est le *réseau de Franklin* du premier (38, 42). Si (R) est de classe 3, (R′) est tétrachrome et se colorie immédiatement avec les quatre couleurs 1, 2, 3, 0 en mettant les couleurs 1, 2, 3 aux faces hexagonales de (R′) qui remplacent les chemins 1, 2, 3 et la couleur 0 à toutes celles qui proviennent des faces de (R).

A toute chaîne de Kempe 1-0, 2-0 ou 3-0 de (R') correspondent dans (R) ce que nous appellerons une *chaîne mixte* formée alterna-

Fig. 3.



tivement, comme on le voit, de faces et d'arêtes. La chaîne 0-1 de (R) n'est autre au fond que l'ensemble des régions d'une des zones blanches ou noires dont nous venons de parler.

V. — ANNEAUX

33. Anneaux. — Toujours dans un réseau cubique, nous appellerons *anneau* tout circuit fermé, formé soit avec des faces, et ce sera un *anneau de régions* ou *anneau de Guthrie*, soit avec des arêtes, et ce sera un *anneau de chemins* ou *anneau de Tait*. Un anneau de régions est limité par deux anneaux de chemins. On considère parfois des *anneaux doubles*, *triples*, etc., un anneau double, par exemple, étant formé de deux anneaux de Guthrie adjacents tout le long d'un même anneau de Tait.

Considérons un anneau de Tait A et ses *chemins latéraux*, chemins qui n'ont qu'une extrémité sur l'anneau. On les distingue en *chemins intérieurs* et *chemins extérieurs* [107], ces deux catégories jouant le même rôle et pouvant être échangées. Si l'on veut numéroter 1, 2, 3 les arêtes et les chemins latéraux de A, on voit d'abord que tout numérotage de cet anneau ne comportant aucune collision entraîne un numérotage et un seul des chemins latéraux. La question est plus complexe que si l'on se donne les numéros des chemins latéraux ou seulement des chemins extérieurs ou intérieurs. On utilise alors la *règle d'exclusion* [107] d'après laquelle trois chemins latéraux consécutifs ne peuvent avoir des numéros tels que 1, 2, 1. Plus généralement, si $p, q, r, s, \ldots$ sont pris dans la liste 1, 2, 3 un numérotage $ppp\ldots qqq\ldots rrr\ldots sss\ldots$ ou, en abrégé, $p^h q^k r^l s^m \ldots$ n'est acceptable que si k est impair quand $p \neq r$, et pair quand $p = r$.

Par application de ces règles, on pourra établir [107] qu'une carte formée d'un anneau de Guthrie comprenant n faces et les deux régions qui la complètent est tétrachrome. Il en est de même d'une carte qui, formée d'un anneau double de n régions pentagonales ($n = 2p$) avec en plus deux régions, est tétrachrome. On établira enfin qu'une carte formée d'un anneau multiple de n régions ($n = p.q$) avec en plus deux régions, est tétrachrome si la carte est formée de deux anneaux extrêmes de p pentagones et de $q - 2$ anneaux intermédiaires de p hexagones chacun.

34. **Existence d'un anneau double.** — Partons d'une face quelconque P d'un réseau cubique. Les régions adjacentes Q, R, ..., U forment certainement un premier anneau de Guthrie. Les régions V, W, ... adjacentes à cet anneau forment elles-mêmes un nouvel anneau de Guthrie [107], sans quoi on trouverait un anneau de quatre régions, cas dans lequel nous verrons que la carte est tétrachrome (37) ou qu'elle se ramène à une carte plus simple. On en conclut que les cartes à étudier ont toutes des anneaux doubles.

Peut on aller plus loin ? On trouve toujours en pratique qu'il existe autour de certaines faces un anneau triple et parfois des anneaux de multiplicité plus grande [107], mais il n'est pas certain qu'il existe forcément un tel anneau triple.

35. **Réseaux ayant F faces.** — Cette existence simplifierait bien des études. Si, en effet, on veut dresser la liste des réseaux ayant F faces, une des méthodes les plus avantageuses est celle qui consiste à partir d'une *mer* (10), choisie de préférence parmi les faces qui ont un grand nombre de côtés et à considérer l'anneau double ou triple qui l'entoure. On cherche ensuite comment peuvent être disposées les faces qui restent en utilisant pour cela diverses remarques qui simplifient cette étude [107].

Prenons comme mer une face P de p côtés, p supérieur à 5 étant le plus grand possible, et le réseau ne contenant ni triangles ni quadrilatères (36). Autour de P existent au moins deux anneaux de Guthrie contenant respectivement p et q régions ($q \geqq p$). Soit r le nombre des sommets situés sur le dernier anneau de Tait. Désignons enfin respectivement par d, t, b, u, i le nombre des *diagonales* de la zone intérieure : arêtes joignant deux sommets r, celui des sommets *triunitaires*, *biunitaires*, *unitaires* ou *isolés* reliés à 3, 2, 1 ou 0 sommets r. On établira facilement les diverses relations qui suivent :

$$q \geqq p \geqq 6, \qquad r \geqq q - p, \qquad r \geqq 2,$$
$$r = u + 2d + 2b + 3t,$$
$$2u = 2p + 2q + r + u + b + t + i = 2p + 2q + 2u + 2d + 4t + 3b + i.$$

On peut noter encore que si $b \neq 0$, $b + u + i \geqq 2$; si $u \neq 0$, $b + u + i \geqq 3$ et si $i \neq 0$, $b + u + i \geqq 4$.

36. **Réductibilités.** — Nous avons déjà dit ce qu'est un réseau minimum (R). Nous allons maintenant en établir diverses propriétés et surtout indiquer certaines configurations qui ne peuvent exister dans un tel réseau. Pour en donner un exemple simple, dans (R) deux régions adjacentes ne sont jamais entourées par un anneau de Guthrie d'un nombre pair de régions, sans quoi en les soudant en une seule et coloriant le réseau réduit ainsi obtenu on en déduirait un coloriage de (R). L'existence d'une telle disposition constitue un *cas de réductibilité* de la carte.

Citons encore le cas de réductibilité facile à vérifier que constitue la présence d'un triangle ou d'un quadrilatère (28). On en déduit d'ailleurs, à l'aide d'une formule déjà donnée (7), que l'on a

$$F_5 = 12 + F_7 + 2F_8 + \ldots.$$

La carte contient au moins 12 *pentagones*. Nous désignerons désormais par P, au lieu de F_5 et H au lieu de F_8 les nombres de pentagones et hexagones.

Disons enfin que l'on appelle *réseau irréductible* tout réseau n'admettant aucune des réductibilités connues.

37. **Réductibilités de Birkhoff.** — Birkhoff [102] a cherché si un anneau de Guthrie de 4, 5 ou 6 régions peut exister dans le réseau

minimum (R). Un tel anneau sépare le réseau considéré en deux parties : la *carte intérieure* et la *carte extérieure*. En remplaçant la carte intérieure par une nouvelle carte réduite formant, suivant les besoins de la démonstration, une, deux ou trois régions, on obtient un nouveau réseau (R') qui, ayant moins de régions que (R), est tétrachrome et donne une certaine répartition des couleurs dans l'anneau de Guthrie. On refait le même raisonnement pour la carte extérieure, ce qui donne un nouveau réseau (R'') colorié avec quatre couleurs et ayant en commun avec (R') l'anneau de Guthrie. Dans tous les cas où l'on peut, fût-ce en utilisant des chaînes de Kempe et y faisant des transpositions (21), avoir un même coloriage de cet anneau, il est évident que (R) est tétrachrome. Comme cela est impossible, un tel anneau de Guthrie est un cas de réductibilité.

Birkhoff obtient par cette méthode divers cas de réductibilité : *Un réseau minimum* (R) *ne peut avoir d'anneau de quatre régions*, sauf si elles entourent une arête, sans quoi le théorème des quatre couleurs serait démontré; (R) *ne peut avoir d'anneau de cinq régions*, sauf si elles entourent une face pentagonale, sans quoi le théorème des quatre couleurs serait encore démontré. (R) *ne peut avoir d'anneau de six régions entourant plus de trois régions*. Il ne peut non plus y avoir d'anneau entourant seulement 4 pentagones, ni d'anneau de p régions entourant un anneau de pentagones, ni enfin d'anneau de $4p$ régions entourant un anneau de $2p$ hexagones. Un cas particulier intéressant à signaler est la réductibilité que forme *une arête entourée de 4 pentagones*.

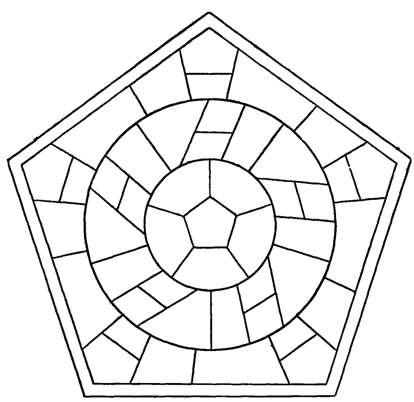
38. **Réductibilités de Franklin.** — Les résultats de Birkhoff ont été étendus par Franklin [103] qui a retrouvé en outre la propriété suivante déjà donnée par Wernicke [108] : *Il y a dans toute carte au moins deux pentagones adjacents ou un pentagone adjacent à un hexagone.*

Franklin établit ainsi que dans un réseau minimum (R) *une arête ne peut être entourée de 3 pentagones et 2 hexagones si l'un de ces derniers admet cette arête comme côté*. D'autre part, *un pentagone ne peut être entouré de 5 pentagones, 4 pentagones et un hexagone, 2 pentagones et 3 hexagones* et aussi *un hexagone ne peut être entouré de 6 pentagones, 5 pentagones ou 4 pentagones et 2 hexagones*. Enfin, *une face à 2p côtés ne peut être entourée* *de $2p-2$ pentagones, les deux faces restantes étant adiacentes* et *une face à $2p-1$ côtés ne peut être entourée de $2p-2$ pentagones.* Il en résulte qu'en aucun cas une face de q côtés ne peut être entourée de $q-1$ pentagones.

Franklin utilise pour sa démonstration, que nous ne reproduirons pas, diverses inégalités et en particulier : $2P \leqq 4H + 5F_7 + 6F_8 + \ldots$. Il établit enfin qu'*un réseau minimum a au moins* 26 *faces* [103]. L'auteur donne un exemple (*fig.* 3, p. 23) de réseau n'admettant aucune des réductibilités précédentes (32, 42), ce réseau qui est tétrachrome contient 12 pentagones et 30 hexagones.

39. **Réductibilités d'Errera.** — Errera [70] obtient de nouvelles réductibilités en montrant qu'*un réseau minimum* (R) *ne peut admettre un anneau contenant un nombre pair d'hexagones et un nombre pair de pentagones, ceux-ci étant deux à deux adjacents, ni un anneau formé d'un nombre pair de pentagones et de deux faces adjacentes*, sous réserve d'une restriction concernant l'introduction possible d'isthme une carte réduite.

Fig. 4.

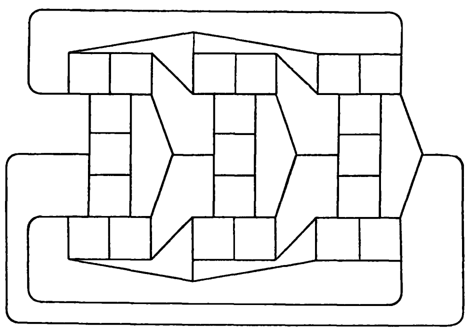


La méthode suivie et les résultats obtenus englobent la plupart des travaux antérieurs de Birkhoff et Franklin. On en déduit en outre la propriété nouvelle que voici : *Un réseau minimum ne peut contenir uniquement des pentagones et des hexagones.*

Errera signale qu'avec sa méthode les réseaux irréductibles antérieurement connus ne le sont plus, mais il existe de tels réseaux au nouveau sens du mot, par exemple le *deuxième réseau d'Errera* [70] (*fig*. 4, p. 27). Il est formé de 32 pentagones et 20 heptagones.

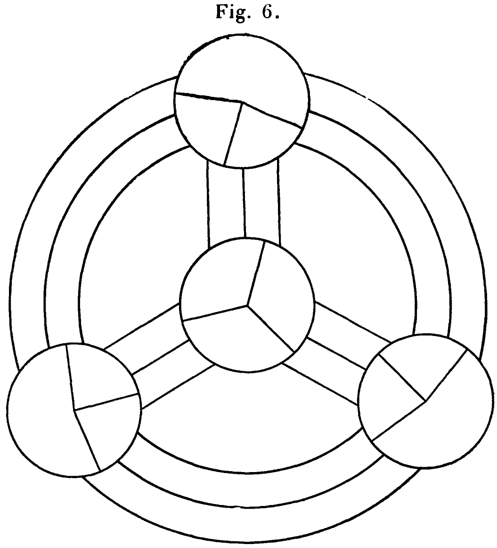
40. **Réductibilités de Reynolds.** — Reynolds [106] étudie des réseaux n'admettant aucune des irréductibilités de Birkhoff, Franklin,

Fig. 5.



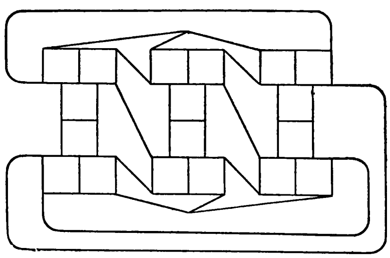
ni les suivantes parmi celles d'Errera : couples de pentagones adjacents entourés d'hexagones, ou octogone adjacent à 6 pentagones. Il établit

Fig. 6.



que : *aucune carte irréductible de moins de* 29 *régions ne peut avoir de polygones de plus de* 8 *côtés* et même que *toute carte* *irréductible doit contenir au moins* 28 *régions* [106]. Il donne enfin un exemple de réseau irréductible (*fig.* 5, p. 28) contenant 36 régions : 21 pentagones, 6 hexagones et 9 heptagones. Tout récemmment, il a donné une carte de 28 régions effectivement irréductible au sens que Birkhoff et Franklin ont donné à ce mot (*fig.* 6, p. 28). On y remarquera une des réductions d'Errera : un

Fig. 7.



anneau de 6 hexagones entourant 2 pentagones adjacents. Il a enfin donné (*fig.* 7, p. 29) une carte de 30 régions seulement n'admettant aucune des réductions connues. Les résultats qui précèdent représentent l'effort le plus grand qui ait été fait en vue d'une démonstration du théorème des quatre couleurs.

41. Pentagones d'un réseau minimum. — Parmi les inégalités obtenues par Franklin, reprenons la suivante : $5H + 5F_7 + 6F_8 + \ldots \geqq 2P$ que nous allons établir en la modifiant un peu [107]. Les P pentagones ($P \geqq 12$) d'un réseau minimum peuvent être répartis en P_0 isolés, et P_1, P_2, P_3 respectivements adjacents à 1, 2 ou 3 autres pentagones, tout autre cas étant impossible : $P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$.

Le nombre des arêtes qui peuvent appartenir à d'autres faces est

$$2P_3 + 3P_2 + 4P_1 + 5P_0 = 2P + P_2 + 2P_1 + 3P_0.$$

Si même toutes les autres faces n'ont pas d'arêtes adjacentes à deux pentagones, en remarquant que toute face est au moins tangente à deux régions non pentagonales, on voit que

$$4H + 5F_7 + 6F_8 + \ldots \geqq 2P + P_2 + 2P_1 + 3P_0,$$

formule un peu plus avantageuse que la précédente. Remarquons encore que la chaîne formée avec des pentagones non isolés ne pouvant admettre d'anneau formé uniquement de pentagones chaque groupe de $3P_3$ adjoints à une telle chaîne suppose l'adjonction d'un P_1 ou d'un P_2, d'où enfin

$$3 + 16H + 20F_7 + 24F_8 + \ldots \geqq 9P.$$

42. Hexagones d'un réseau. — La formule (7)

$$P = 12 + F_7 + 2F_8 + 3F_9 + \ldots$$

ne fait pas intervenir le nombre des hexagones. Il est facile en effet de voir que le nombre des hexagones peut, de bien des façons, être augmenté autant qu'on le veut. Nous avons déjà signalé la transformation d'un réseau en réseau de Franklin (32, 38).

Considérons encore [107] un circuit rencontrant p chemins et remplaçons-le par un anneau de p hexagones, chaque chemin coupé étant interrompu à la traversée de l'hexagone correspondant. Ici, chacune des régions traversées est coupée en deux et gagne au total deux arêtes.

Franklin a montré [103] que les pentagones et les hexagones ne peuvent être entourés de pentagones et d'hexagones de façon arbitraire. Sainte-Laguë [107] fait remarquer en outre qu'*il n'est pas possible que chaque hexagone du réseau ne touche ni pentagone ni hexagone et que chaque pentagone touche au plus un seul pentagone*, car alors chaque pentagone apporte au moins 4 sommets nouveaux et chaque hexagone 6, donc $4P + 6H \leqq S$; d'où

$$P + 2H + 2 \leqq F_7 + F_8 + \ldots$$

qui est incompatible avec $P = 12 + F_7 + 2F_8 + \ldots$.

VI. — Problèmes divers.

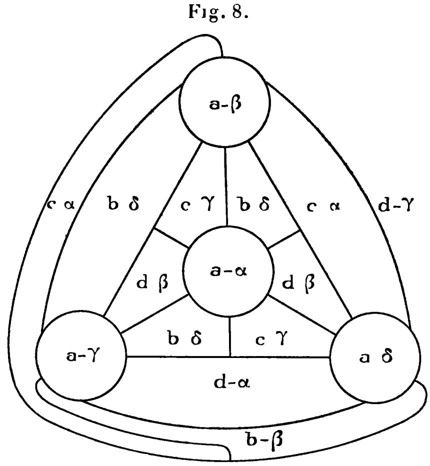
43. Coloriages distincts d'une carte donnée. — Soit (R) un réseau tétrachrome dont chaque région a reçu une des couleurs a, b, c, d et par suite chacune des arêtes un des numéros 1, 2, 3 (19). La chaîne de Kempe a-b ou la chaîne de Tait 1-2 (21) comprend toutes les régions a, b ou toutes les arêtes 1, 2. Une telle chaîne n'est pas forcément *entière*, c'est-à-dire d'un seul tenant et peut être formée de divers *chaînons*. Il existe d'ailleurs des cas où toutes les chaînes de

Kempe et de Tait sont entières, comme on le voit avec le dodécaèdre régulier. Toute chaîne de Kempe étant limitée par une chaîne de Tait (21), si l'une d'elles est entière, il en est de même de l'autre.

Une *transposition a-b* faite sur un chaînon est seule intéressante. Si elle est faite sur une chaîne entière, c'est une simple *permutation* des deux couleurs a, b. Deux coloriages de (R) seront dits *identiques* si l'on peut passer de l'un à l'autre par des permutations de couleurs, et *équivalents* si l'on y arrive par des transpositions. Tous les coloriages qui se déduisent par des transpositions de l'un d'entre eux forment un *groupe de Kempe* (28).

Existe-t-il pour un réseau (R) des coloriages *distincts*, c'est-à-dire non équivalents? Dans le dodécaèdre régulier dont le coloriage ne donne qu'une chaîne de Kempe entière, toute transposition le laisse identique à lui-même. Cependant si l'on fait tourner le dodécaèdre de 72° [*E.*, p. 43], on obtient un coloriage distinct du premier. On peut donner d'autres exemples tel que le suivant (*fig.* 8, p. 31) : il

Fig. 8.



admet deux coloriages essentiellement distincts indiqués par les lettres a, b, c, d et α, β, γ, δ; on le verra en considérant les quatre hexagones qui sont représentés par des cercles. Pour les cartes usuelles il n'existe le plus souvent qu'un seul coloriage.

44. A un point de vue assez différent, quelques auteurs se sont préoccupés de savoir combien une carte (R) admet de coloriages pos-

sibles. Dixon [110], supposant que (R) est cubique, désigne par φ le nombre total des coloriages possibles, par φ_{ab}, φ_{abc}, ... les nombres de façons de colorier la carte avec les deux couleurs a, b, ou les trois couleurs a, b, c, ... pour une carte usuelle $\varphi_{ab}=0$, $\varphi_{abc}=0$.

Si la carte contient une *île* de couleur a (10) entourée par une région de couleur b, on a $\varphi=3\varphi_{ab}$. Si elle comprend une région à deux côtés de couleur a et deux arêtes adjacentes à deux autres régions de couleurs b, c, on a $\varphi=2\varphi_{ab}=2\varphi_{ac}$, etc.

Ces formules permettent pour une carte simple d'avoir le nombre de coloriages possibles, et c'est ainsi que de Montessus [113] s'est occupé du coloriage d'un échiquier, mais en pratique la complication des calculs les rend vite impossibles à effectuer.

Birkhoff [102] envisage le cas où l'on se donne α couleurs, α pouvant être grand, et cherche le nombre $P(\alpha)$ de façons de colorier une carte donnée de F régions. S'il y a m_i façons pour i couleurs, il y en a $m_i\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)$, si l'on tient compte des permutations, donc

$$P(\alpha)=m_1\alpha+m_2\alpha(\alpha-1)+\ldots+m_F\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-F+1).$$

En général, on a $m_1=0$, souvent même $m_2=m_3=0$ et $m_F=1$. On voit que $P(\alpha)$ est un polynome de degré F en α. Birkhoff le met aussi sous la forme d'un déterminant, dans lequel interviennent les nombres de façons de colorier les cartes de $F-1$, $F-2$, ..., régions déduites de la carte donnée. L'auteur applique sa méthode au cas d'une carte de trois régions pour laquelle

$$P(\alpha)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2),$$

puis à une carte de cinq régions dont trois forment un anneau

$$P(\alpha)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)^2.$$

Il déclare en terminant que pour un dodécaèdre régulier les calculs seraient inextricables.

45. Couleurs imposées pour certaines régions. — p régions étant choisies à l'avance dans une carte tétrachrome, peut-on les colorier *a priori* avec des couleurs imposées, la carte restant toujours tétrachrome? [116] Il est évident *a priori* qu'il n'en est rien. Par exemple dans un réseau déjà considéré (*fig.* 6, p. 28), les quatre hexagones représentés par des cercles sont forcément coloriés *aaaa* ou *abcd*. Mieux encore, dans un dodécaèdre régulier qui au fond n'admet qu'un seul coloriage (43), on ne peut imposer à deux régions diamétralement opposées la même couleur sans que la carte devienne pentachrome. De façon analogue, si l'on veut que dans le même dodécaèdre régulier les faces opposées aient deux à deux la même couleur, on a une carte hexachrome. Considérons encore deux heptagones A, A′ séparés par un double anneau de Guthrie [116], chacun d'eux étant formé de 7 pentagones : B, C, D, E, F, G, H et D′, G′, H′, C′, B′, E′, F′ (D′ adjacent à B et C, G′ à C et D, ..., F′ à H et B). Imposons-nous la condition d'employer la même couleur pour A et A′, de même pour B et B′, C et C′, etc., on trouvera qu'il faut 8 couleurs pour les 16 régions. Peut-être est-il possible pour $p > 8$ d'obtenir une carte de $2p$ régions telles que p couleurs soient nécessaires pour la colorier, les régions étant par avance associées deux à deux.

46. **Réseaux toriques.** — Heawood le premier [98] s'est préoccupé de chercher le *nombre chromatique* γ d'un réseau non sphérique tracé soit sur un tore ordinaire, soit sur un tore généralisé ou *tore à p trous* pour lequel la formule de Descartes devient [*E*, p. 57]

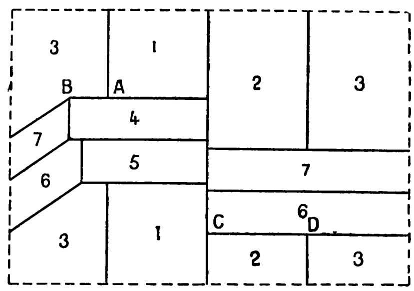
$$S + F = A + 2 - 2p.$$

Ici γ désigne un nombre de couleurs suffisant pour colorier la carte la plus compliquée et nécessaire pour colorier certaines cartes. En se ramenant, ce qui est possible, à un réseau cubique, on a $A = 3n$, $S = 2n$, $F = n + 2 - 2p$.

Le problème est beaucoup plus simple que pour la sphère. Cherchons pour γ une limite supérieure x et une limite inférieure y. On prendra pour x le nombre des couleurs suffisantes pour colorier n'importe quelle carte, et on l'obtiendra par récurrence pour une carte de F régions en partant des cartes de F — 1 régions. Quant à y, c'est le nombre minimum nécessaire pour colorier certaines cartes simples. Si $x = y$, il est évident que γ est connu.

Pour le tore ordinaire, le nombre moyen des arêtes de chaque face étant $\frac{2S}{F} = 6$, celui des régions en contact avec une région donnée est 6 et il y a au moins un hexagone. On en conclut par récurrence que $x = 7$. D'autre part, considérons une carte torique convenablement choisie (*fig.* 9, p. 34). Cette carte est mise sous forme de rectangle, mais en soudant deux côtés opposés on a un cylindre de révolution, facile à transformer à son tour en tore. Ici $y = 7$, donc $\gamma = 7$ *est le nombre chromatique d'un tore ordinaire.*

Fig. 9



Par un raisonnement analogue, on trouvera que α est le plus grand entier contenu dans $\frac{7+\sqrt{1-48p}}{2}$.

47. $\gamma = \alpha$ *est le nombre chromatique pour un tore à* p *trous*, sous la seule réserve qu'il existe effectivement une carte de α régions dont chacune touche toutes les autres (*E.*, p. 61).

Pour un tore à deux trous, on voit immédiatement qu'il en est bien ainsi, car les deux arêtes AB, CD (*fig.* 9, p. 34) peuvent être réunies à l'aide d'un trou convenablement placé sur un tore ordinaire, ce qui donne une nouvelle région touchant les sept autres.

Heffter [112] a montré qu'il en est bien ainsi pour toutes les valeurs de p jusqu'à 7. Les valeurs de γ sont pour les premières valeurs de p (si $p \leqq 7$, on a $\gamma = \alpha$)

$p =$	0	1	2	3	4	5	6	7	9	9	10
$\gamma =$	4 (?)	7	8	9	10	11	12	[illegible]	13 (?)	13 (?)	14 (?)

48. Autres cas. — Tietze [118] a envisagé le problème de la carte pour des surfaces n'ayant qu'un côté, comme le ruban de Möbius pour lequel il faut 6 couleurs. On le verra en traçant un rectangle découpé en trois bandes rectangulaires, horizontales : la première contient deux régions de couleurs 1 et 2; la deuxième, trois régions de couleurs 3, 4, 5, la région 4 étant adjacente aux deux précédentes; la troisième, trois régions de couleurs 2, 6, 1, la région 6 étant adjacente aux trois précédentes. Il suffit de relier les côtés libres verticaux en tordant le rectangle pour obtenir le ruban de Möbius considéré.

Guthrie [74] a fait remarquer que dans l'espace le problème de la carte n'existe pas et que, quel que soit p, on peut construire p régions dont chacune touche toutes les autres. Tietze [118] a montré qu'il en est de même si l'on exige que les p régions soient convexes [*E.*, p. 62].

VII. — Jeux linéaires.

49. **Traversées.** — Parmi les problèmes concernant les dispositions rectilignes d'objets et les échanges que l'on peut faire entre eux, les plus simples et les plus anciens sont probablement ceux qui concernent les traversées de rivières. Celui du loup, de la chèvre et du chou [146, 154] est le modèle du genre.

L'un des cas les plus compliqués qui aient été imaginés est le suivant [146, 154] : *n maris et leurs n femmes doivent traverser une rivière à l'aide d'un bateau pouvant contenir au plus x personnes. Aucune femme ne doit rester en compagnie d'un autre homme si son mari n'est pas là. Quelle est la valeur minimum de x pour laquelle le problème est possible?*

50. On a compliqué cette question [146, 154] en supposant, dans le cas où le bateau ne peut contenir plus de deux personnes, qu'il y ait *au milieu de la rivière*, *une île* sur laquelle on peut s'arrêter.

Tarry a encore embrouillé la question en imaginant qu'il s'agisse de Mahométans, chaque homme ayant un harem de m femmes dont aucune ne sait manœuvrer le bateau [154].

51. **Garages.** — De façon analogue, on a étudié de nombreux problèmes de garages de trains. Prenons par exemple un train composé d'une locomotive L et de 10 wagons L, F, J, D, G, E, A, H, C, I, B. On veut remettre ces wagons dans l'ordre alphabétique en utilisant pour ce tri deux voies en impasse, qui se trouvent à l'extrémité de la voie sur laquelle se font les mouvements. Une méthode générale donnerait quatre manœuvres, mais avec un peu d'attention on peut voir que trois suffisent.

52. Jeu de Chifu-Chemulpo. — De façon plus compliquée, Dudeney [131] cite le *jeu de Chifu-Chemulpo*. Il comporte une locomotive et n wagons numérotés de 1 à n (habituellement $n = 8$) circulant sur une voie ferrée formée en principe d'un arc de cercle ABMCD et d'une corde BC qui laisse libres sur la voie principale les deux tronçons en impasse AB, CD pouvant contenir chacun un wagon ou la locomotive, les bifurcations en B et C restant libres. L'arc de cercle BMC contient au plus $n - 3$ véhicules et la corde BC peut en contenir $n - 4$. Au début, la locomotive étant seule sur BC, les wagons occupent la voie principale ABMCD où ils sont dans l'ordre $n, n-1, \ldots, 2, 1$. Le jeu consiste à les remettre dans l'ordre naturel, chaque wagon pouvant être poussé à la main sans le secours de la locomotive.

On voit assez facilement que le problème qui ressemble un peu au Taquin (82), admet toujours une solution en identifiant la locomotive à un wagon ordinaire et assimilant le circuit à un cercle sur lequel se déplacent en tournant tous les véhicules, ce qui permet à l'aide des impasses d'en échanger deux consécutifs.

Pour avoir le nombre minimum de mouvements, partageons comme le propose Nebolsine [152], les n wagons en deux groupes de p et $q-1$ $(n+1 = p+q)$, la locomotive opérant avec le groupe de $q-1$ wagons. On rétablit séparément l'ordre dans chacune des moitiés, ce qui donne pour p wagons $\varphi(p)$ mouvements et pour $q-1$ wagons et la locomotive $\varphi(q)$ mouvements avec

$$\varphi(p) = \frac{1}{2}(p^2 + 2p - 4)$$

si p est pair et $\frac{1}{2}(p^2 + 2p - 7)$ si p est impair. Il faut ajouter deux manœuvres à $\varphi(p) + \varphi(q)$ pour avoir la réponse. On en déduira que si $n = 4m$ le nombre des manœuvres est $4m^2 + 6m - 2$. Si $n = 4m+1$,

$$N = 4m^2 + 8m - 2,$$

si $n = 4m + 2$, c'est

$$4m^2 + 10m + 2,$$

enfin, si $n = 4m + 3$,

$$N = 4m^2 + 12m + 4.$$

53. Pièces de monnaie. — De nombreux jeux ou problèmes comportent l'emploi de pièces de monnaie (70) ou de jetons. Considérons, par exemple [131], $2n$ pièces disposées en ligne droite et proposons-nous de les empiler deux par deux, en faisant à chaque fois sauter une pièce par-dessus les deux pièces, empilées ou non, qui sont à sa droite ou à sa gauche. Si $n = 4$, on arrive sans difficulté à former 4 piles doubles; pour $n < 4$ le problème est insoluble. Si $n > 4$, on superpose la troisième pièce à la première et l'on se trouve ramené au cas de n à celui de $n - 1$.

Numérotons 1, 2, 3, ..., $2n$ les places occupées au début par ces $2n$ pièces. *Peut-on arriver à les empiler en se fixant d'avance les n places qui devront être occupées à la fin?* Il n'en est rien, en général, puisque avec 8 pièces les 4 places occupées seront : 1, 2, 5, 7; 1, 2, 6, 7; 1, 2, 7, 8; 2, 3, 5, 7 et les 3 dispositions qui s'en déduisent par symétrie. Pour $n = 5$ on trouve de même 14 solutions seulement. Diverses remarques permettent de simplifier les recherches [158]. Si la première pile formée est à l'une des extrémités, elle n'intervient plus dans la suite. Notons aussi que par-dessus une pile déjà formée on ne peut faire sauter au plus qu'une seule pièce. Si donc une pile sépare $2m$ et $2p$ jetons ($m + p = n - 1$), aucune pièce ne devra passer par-dessus et l'on examinera séparément pour les juxtaposer, les solutions concernant $2m$ et $2p$ pièces. Par contre, s'il y a $2m + 1$ et $2p + 1$ pièces ($m + p = n - 2$), on est ramené au problème suivant complètement analogue au premier : « Former avec $2p + 1$ pièces p piles de 2 pièces, étant entendu qu'à tel moment que l'on voudra on peut supprimer la pièce située à l'une des extrémités, ou la doubler par une pièce étrangère ».

54. Signalons comme variante au problème ci-dessus le cas où lorsqu'on fait sauter une pièce, on ne compte toute pile de 2 pièces déjà formée que pour 1. Le problème n'est possible qu'à partir de 6 pièces.

Proposons-nous maintenant avec mn pièces de former des piles de m pièces, en faisant chaque fois sauter une pièce par-dessus m pièces empilées ou non. Ces problèmes sont tous possibles, mais seulement s'il y a plus de 4 piles à faire. Le cas de $n = 1$ est immédiat. Pour montrer que pour $n = 2$ ou 3 le problème est impossible, on le prendra à l'envers en essayant à partir des piles finales de retrouver les coups qui y ont conduit. Pour $n \geq 4$, on forme une pile de $m - 1$ pièces à la deuxième place, puis une seconde à l'avant-dernière place que l'on transforme en piles de m pièces, puis on forme une pile de m à la première place et une à la dernière, et l'on recommence ces opérations autant de fois qu'il est nécessaire.

55. Citons encore le problème suivant, cas particulier du solitaire [158] : « n jetons occupent n des $n+1$ cases d'une suite rectiligne. Un jeton ne peut sauter par-dessus un jeton voisin, que l'on retire alors du jeu, pour retomber sur la case suivante que si elle est vide. Est-il possible d'enlever tous les jetons sauf un? »

Une coupure formée de trois cases vides consécutives n'étant jamais franchissable, comme on le verra, considérons-en une de deux cases. On vérifiera qu'aucune pièce ne peut dépasser le milieu de la coupure [158]. On en déduit que le problème n'est possible que si $n = 2q + 1$ et si la case vide occupe au début une des cases 1, 4, $2q - 2$ ou $2q + 1$.

56. **Bal de crapauds et de grenouilles.** — Sous ce nom, Lucas [149] examine le cas de n crapauds et n grenouilles qui se croisent sur un chemin étroit en procédant par bonds qui sont des *pas* ou des *sauts* par-dessus un autre animal. Il faut pour le croisement complet $n(n+2)$ *coups* dont n^2 *sauts* et $2n$ *pas*.

De façon analogue, considérons $n+1$ cases sur lesquelles sont placés n jetons : 1, 2, ..., n précédés d'une case vide. Chaque jeton peut occuper la case vide si elle est immédiatement voisine, et l'on a un *pas*, ou en sautant par-dessus un jeton voisin et l'on a un *saut*. Il faut avec le nombre minimum de coups, pas ou sauts, obtenir les nouvelles dispositions n, $n-1$, ..., 2, 1. Dudeney [131] a établi qu'il faut $\frac{n^2-n}{2}$ coups dont n pas si n est pair, et $\frac{n^2+3n-8}{2}$ coups dont $2n-4$ si n est impair.

57. **Problème de Tait.** — Tait [160] a proposé un intéressant problème avec 4 « souverains » et 4 « shillings », ou plus généralement avec n jetons blancs et n noirs. Sur $2n+2$ cases consécutives dont les deux premières sont vides, plaçons alternativement un jeton blanc et un noir. A chaque *coup* on prend deux jetons consécutifs et *sans changer leur ordre relatif*, on les met sur les deux cases consécutives vides qui occupent ainsi des places variables. Il faut arriver ainsi

à avoir côte à côte n jetons blancs et n noirs sans cases vides intermédiaires. Delaunoy en a donné une solution que nous ne reproduirons pas [131], et pour laquelle il faut examiner 4 cas suivant que $n = 4m$, $4m + 1$, $4m + 2$ ou $4m + 3$. Le nombre des coups est toujours n.

Il est facile de généraliser le problème de Tait [158] en fixant les positions initiales et finales des jetons blancs et noirs. On voit d'abord qu'on peut échanger 2 couples en 3 coups. On vérifiera que l'on peut arriver à volonté à mettre tous les jetons à la place indiquée en ne touchant qu'à 4 jetons consécutifs autres que les jetons à déplacer. Il reste à voir si l'on peut, sans toucher au reste du jeu, ramener 4 jetons consécutifs à avoir tel ordre que l'on voudra. Ici, intervient la théorie classique des *inversions* dans les *permutations* [123] et leur répartition en deux *classes* suivant la parité de leur nombre. Le déplacement d'un couple de jetons ne pouvant modifier la classe de la permutation, on ne peut amener dans le cas de quatre jetons consécutifs que deux d'entre eux en place, sauf si les permutations initiale et finale sont de même classe. Mais ici cette restriction ne joue pas, car si les deux dispositions considérées sont différentes, il y en a au moins une qui aura deux jetons consécutifs de même couleur, et, avec une numérotation convenable, on se ramène toujours au cas de deux dispositions de même classe.

58. **Problème inverse de Tait.** — On a considéré parfois [131] le problème de Tait avec une convention un peu différente : les jetons étant pris par couples de deux consécutifs, on les intervertit avant de les reposer, ce qui n'a d'ailleurs d'effet que dans le cas de couleurs différentes. On arrive toujours dans ce nouveau cas à résoudre le problème de Tait pour $2n$ jetons avec $n + 1$ coups.

Ici encore [158] il est toujours possible de passer d'une disposition donnée à l'avance à une autre, en appliquant la règle du jeu.

VIII. — Autres jeux linéaires.

59. **Tour d'Hanoï.** — Nous avons réservé pour le présent Chapitre divers jeux assez différents de ceux qui précèdent et qui présentent à peu près tous ce caractère curieux, de faire intervenir les propriétés de la numération binaire.

Le plus simple d'entre eux est celui de la *tour d'Hanoï* imaginé par Lucas [174]. Un socle horizontal supporte trois aiguilles verticales A, B, C sur lesquelles peuvent être enfilés par leur centre des disques numérotés de 1 à n et dont le rayon va diminuant avec le numéro. La règle fondamentale du jeu est que sur un disque on ne peut placer qu'un disque de rayon plus petit au début du jeu. Les n disques étant en A, il s'agit de les transporter un à un, en respectant la règle fondamentale, de façon qu'ils soient tous en B, ou en C.

On trouvera aisément la marche à suivre qui comporte $2^n - 1$ coups. Si l'on représente les disques 1, 2, 3, ... par les nombres 1, 10, 100, ..., on peut noter toute disposition des disques, par exemple 7, 6, 4, 1 par un nombre binaire 1101001 et réciproquement.

60. Si l'on écrit la liste des disques déplacés dans l'ordre où ils le sont, on obtient des suites telles que la suivante : 121321412321 21. Elles ont des propriétés de symétrie assez remarquables : le numéro 4 sert de centre de symétrie; si on le supprime, chaque moitié est à son tour symétrique par rapport à 3, et ainsi de suite. On retrouve de telles dispositions si l'on plie une longue bande de papier en deux, puis encore en deux, etc., puis si on la déplie après avoir numéroté les plis n, $n-1$, ..., 2, 1 [178].

Dudeney [170] a examiné, dans le cas où il y a plus de trois aiguilles, quel est le nombre minimum de coups nécessaires pour transporter tous les disques d'un point à un autre. C'est ainsi que pour 4 emplacements et C^2_{p+1} disques, il faut $(p-1)2^p + 1$ coups; pour 5 emplacements et C^3_{p+2} disques, il en faut $p(p-1)2^{p-1} + 2^p - 1$.

61. **Baguenaudier.** — Le jeu bien connu de *baguenaudier* ou des anneaux chinois est très ancien, et des mathématiciens comme Cardan s'y sont intéressés. Nous ne le décrirons pas, car il se trouve exposé dans tous les Traités classiques et en particulier dans Lucas [168, 174]. Nous nous bornerons à rappeler que la très ingénieuse solution du problème que l'on en a donnée est basée tout entière sur la numération binaire.

62. **Fan-Tan.** — Sous le nom de *Nim* dans les écoles américaines, et de *Fan-Tan* en Chine, se joue un jeu curieux et d'origine inconnue [165, 166, 169]. Les deux joueurs A et B forment un nombre

quelconque de tas égaux ou inégaux d'un nombre arbitraire de cailloux chacun. Ils puisent à volonté un ou plusieurs cailloux dans un des tas; on peut même prendre tous les cailloux du tas. Celui qui prend le dernier caillou a gagné.

Nous nous bornerons à donner [165] la méthode que doit suivre A. Supposons qu'il ait en face de lui trois tas de 29, 37 et 43 cailloux. Écrivons ces nombres les uns au-dessous des autres en numération binaire

29..................	1 1 1 0 1
37..................	1 0 0 1 0 1
43..................	1 0 1 0 1 1

Pour A cette position est *mauvaise* parce que dans chaque colonne le nombre des 1 n'est pas pair. A ne peut rendre *bonne* sa position en touchant au tas 37, ni au tas 43, mais dans le tas 29 il peut enlever des cailloux de façon à n'en avoir plus que 14, ce qui s'écrit 1 1 1 0. Il y a d'ailleurs des cas où A a le choix entre plusieurs tas. Quel que soit le jeu de B, A s'il a réalisé le premier une position bonne, peut toujours s'en assurer une autre bonne chaque fois qu'il joue, et gagner ainsi à coup sûr. Toute position bonne pour lui est mauvaise pour B après qu'il a joué. Si A et B sont très au courant des règles du jeu et que, cas très rare, la disposition initiale soit bonne, c'est le second joueur qui gagne, sinon c'est le premier.

Avec trois tas, s'il y a moins de 2^n cailloux par tas, sur

$$\frac{1}{3}2^{n-1}(2^{2n}-1)$$

positions, il y en a

$$\frac{1}{3}(2^n-1)(2^{n-1}-1)$$

qui sont bonnes. Leur rapport est $\frac{1}{2^n}$ environ et décroît très vite.

63. Si c'est le joueur qui prend le dernier caillou qui perd, on a une théorie analogue à la précédente, mais ici la position est bonne pour A lorsque dans chaque colonne il y a un nombre impair de chiffres 1 [165]. Signalons encore une variante qui conduit à une étude très compliquée, faite par Whytoff [179]. Il y a deux tas et chaque joueur prend à son choix p cailloux à un seul tas ou p cailloux à chaque tas, p étant à chaque coup complètement arbitraire.

64. Treize quilles. — Voici encore un jeu très ancien quoique peu connu et dont la théorie a été donnée par Dudeney [170]. Les deux joueurs A et B placent côte à côte 13 quilles numérotées 1, 2, ..., 13 de gauche à droite. La deuxième est renversée au début du jeu. L'écartement des quilles est tel que chaque joueur ne peut avec sa boule abattre qu'une quille ou deux quilles voisines, celui qui abat la dernière ou les deux dernières a gagné. Nous supposerons simplement ici qu'il s'agisse de jetons formant une suite rectiligne et dans laquelle on enlève à volonté un jeton ou deux contigus.

Est *bonne* pour A toute disposition dans laquelle les *paquets* ou groupes de jetons contigus peuvent être associés deux à deux par paquets identiques. Par exemple, désignons par 1 tout jeton restant et par 0 tout jeton enlevé; une disposition 1001110101110 est bonne car il y a 2 paquets de 1 et 2 de 3. L'ordre de ces groupes important peu, on pourra la représenter par 1133. On trouve d'ailleurs 542 bonnes positions sur 4095, soit environ une sur sept.

Si A peut transformer en une bonne position celle que lui offre B, il est certain de gagner, car il n'aura ensuite qu'à jouer exactement comme B. Une analyse complète du jeu montre que si A joue le premier et enlève d'abord l'un des numéros 3, 6 ou 10, ce qui le ramène à une disposition 137, il est certain, en jouant bien, d'obtenir en 1 ou 2 coups une position bonne et par là de gagner.

65. Tchouka. — La *Tchouka* est un jeu russe à peu près complètement inconnu chez nous [171, 172, 178] malgré sa grande simplicité. Prenons $2n+1$ cases représentées en pratique par des soucoupes dont la dernière à droite est la *Rouma*. Dans chacune des $2n$ cases autres que la Rouma on met au début du jeu n billes ou jetons. On pourrait généraliser sans peine en prenant des nombres de billes variables dans chaque soucoupe.

Il n'y a qu'un joueur. Il prend à un instant quelconque du jeu toutes les billes qui sont dans une soucoupe choisie arbitrairement, autre que la Rouma, et les dépose une à une dans les cases voisines en allant de gauche à droite et recommençant s'il y a lieu au début. Si la dernière bille tombe dans une soucoupe déjà occupée, il la reprend avec toutes les billes de cette soucoupe et recommence à les déposer une à une. Si elle tombe dans la Rouma, il choisit arbitrairement une des soucoupes et recommence, mais si elle tombe dans une soucoupe vide, il a perdu. Pour gagner, il faut qu'il puisse mettre toutes les billes dans la Rouma.

Si $n = 2$, il y a 4 soucoupes 1, 2, 3, 4, suivies de la Rouma. Pour noter une partie, il suffit évidemment de dresser la liste des numéros des soucoupes par lesquelles on recommence toutes les fois que le joueur a l'initiative du choix d'un point de départ. On trouve ici une seule façon de gagner, représentée par 343424. Pour $n = 3$, la façon de jouer la plus avantageuse est donnée par 454653466. Flye Sainte-Marie [172] a donné pour $n = 4$ la liste des 9 coups qui sont les seuls possibles. En voici un dans lequel nous avons, pour plus de clarté, remplacé par un trait le chiffre 8 chaque fois qu'il intervient : 5—251—36—72—2—4—7—5—6—.

66. Dans le cas général [178], on peut donner les diverses remarques qui suivent : *au premier coup, il faut commencer par la* $(n+1)^{\text{ième}}$ *soucoupe. Si, partant de la Rouma, on compte de droite à gauche* 1, 2, 3, ... *toute soucoupe qui a comme nombre de billes le nombre énoncé est bonne*, ce qui veut dire simplement qu'elle donne un coup qui se termine dans la Rouma. *Si, partant d'une case vide, on compte de gauche à droite* $2n$, $2n-1$, ... *sans se laisser arrêter par la Rouma, toute soucoupe qui a comme nombre de billes le nombre énoncé est mauvaise. Toute soucoupe avec* $2n+1$ *billes est mauvaise. Une soucoupe qui, prise comme point de départ, conduit à poser la dernière bille dans une soucoupe où il y en a déjà* $2n$ *est mauvaise. Une soucoupe est mauvaise si le total des billes qu'elle contient et de celles que contient la soucoupe à laquelle on aboutit est* $2n$.

IX. — Jeux circulaires.

67. **Pièces de monnaie.** — Beaucoup de jeux linéaires peuvent être repris en supposant que les dispositions rectilignes sont remplacées par des dispositions circulaires. Ceci supprime le rôle exceptionnel joué par les pièces qui occupent les extrémités de la suite rectiligne et d'autre part, introduit la notion du sens des déplacements. Par exemple, plaçons 12 pièces aux sommets d'un dodécagone régulier et en déplaçant chaque pièce par saut, dans un sens fixé

d'avance au-dessus de deux autres empilées ou non, cherchons à avoir 6 piles de deux pièces occupant les sommets d'un hexagone régulier. On verra que ce problème possible pour $2n$ pièces, sauf pour $n = 1$ ou $n = 3$, ne l'est pas en général si l'on fixe les emplacements sur lesquels seront les piles.

Reprenons encore le problème du déplacement des jetons (53), traité par Dudeney [200] avec n jetons sur un cercle et une case vide marquée o. On part, par exemple, de la disposition o, 1, 2, ..., n que l'on veut, avec le nombre minimum de *coups : sauts* ou *pas*, ramener à la suivante o, n, $n-1$, ..., 2, 1, la place du zéro étant redevenue la même. On trouve que le nombre des coups dans les deux cas est $\frac{1}{4}(n^2 + 4n - 16)$ pour n pair et supérieur à 4 et $\frac{1}{4}(n^2 + 6n - 31)$ pour n impair et supérieur à 3.

68. **Problème de Josèphe.** — Ce problème célèbre, et au sujet duquel il a été publié des historiques détaillés [180, 181] et de nombreux travaux mathématiques, tire son nom de l'historien juif Flavius Josèphe, qui, paraît-il, sauva comme suit sa vie pendant les massacres ordonnés par les troupes de l'empereur Vespasien. Enfermé dans une caverne avec 40 de ses coreligionnaires décidés, contrairement à son avis et à celui d'un de ses camarades, à se tuer pour ne pas être pris vivants, il les fit placer en cercle, mettant son camarade à la place 16 et lui-même à la place 31. Puis on compta de 3 en 3 en tournant dans le même sens et l'on égorgea tous ceux qui étaient désignés ainsi. A chaque tour on ne tenait compte que des survivants : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 1, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32, 37, 41, 7, 13, 20, 26, 34, 40, 8, 17, 29, 38, 11, 25, 2, 22, 4, 35, 16, 31. On voit que son camarade et lui restèrent seuls après la suppression des 28 autres.

Un autre énoncé classique de cette question, connue aussi sous le nom de *problème de Caligula* est celui de 15 chrétiens et 15 Turcs qu'il faut disposer de façon qu'en comptant de 9 en 9 tous les Turcs soient tués. Les chrétiens survivent seuls, ce qui suppose qu'on leur a donné les places suivantes : 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 29. On appelle encore de telles questions des problèmes de *décimation*.

On a essayé de prévoir par avance avec q objets disposés circulairement sur quel numéro tombe le $n^{ième}$ coup si l'on compte de p en p, en particulier à l'aide de formules de récurrence, mais bien peu de résultats positifs ont été obtenus [180, 182, 186, 195, 221, 222, 243].

69. De façon analogue, supposons avec Dudeney [200], que 12 jetons blancs et un noir qui a le numéro 1 soient disposés circulairement et comptons de p en p. Si $p = 13$, de quel numéro faut-il partir pour que le jeton noir soit le dernier? La réponse est 8. Le problème est beaucoup plus compliqué si l'on demande la valeur minimum de p pour qu'en partant du jeton noir il soit encore le dernier. C'est 21.

Pour essayer $p = 2$, écrivons la suite, 13, 12, ..., 2, 1 sous chaque terme de laquelle nous allons disposer de nouveaux entiers. Sous 13, mettons le numéro qui doit rester le dernier, soit 1. Puis, comme 3 ne peut être retranché de 1, retranchons-le de $1 + 13$, ce qui donne 11 que l'on écrit. Mettons à la suite $11 - 3 = 8$, $8 - 3 = 5$, $5 - 3 = 2$. On retranche ensuite 3 de $2 + 9$, nombre situé au-dessus de 2, ce qui donne 8, et ainsi de suite. On trouve ainsi 0 sous le nombre 2 et à la 11^e place. C'est que le jeton noir sera pris le 11^e et que $p = 2$ ne convient pas. Le nombre 21 est ici la plus petite solution, mais si on l'augmente de multiples de 360360, qui est le plus petit multiple commun des 13 premiers nombres, on a de nouvelles solutions. Ce ne sont pas d'ailleurs les seules puisque 24, par exemple, convient.

Cherchons encore la valeur minimum de p pour que le jeton noir soit atteint au troisième coup. On trouve 100. Il y a pour traiter un tel problème des méthodes de calcul assez particulières et sur lesquelles nous n'insisterons pas car elles se rattachent surtout à la théorie des nombres,

70. **Souricière.** — Disposons circulairement n cartes numérotées 1, 2, ..., n en les plaçant dans un ordre arbitraire, puis partons d'une case désignée et comptons 1, 2, 3, ... : si, en comptant p on arrive au numéro p, on a une *réussite*. Après avoir relevé ce numéro, on recommence à compter à partir de la carte suivante : 1, 2, 3, ..., et ainsi de suite. On gagne si l'on enlève toutes les cartes.

Cayley [194, 230], de Steen [230, 235], ont étudié ce jeu qui s'appelle la *souricière*.

71. Battements de cartes. — Prenons, comme le propose Monge [224], un paquet de cartes que nous numéroterons 1, 2, ..., m. Mettons la seconde sur la première, la troisième sous la seconde, et ainsi de suite alternativement. On recommence ce mélange une deuxième fois, une troisième, etc. Y a-t-il des cartes qui ne changent pas de place? Au bout de combien de mélanges retrouve-t-on la disposition initiale?

On verra que dans un jeu de $6K+4$ cartes, la $(2K+2)^{\text{ième}}$ ne change pas (la 18e pour 52 cartes) et dans un jeu de $10K+2$ la $(2K+1)^{\text{ième}}$ change de place avec la $(6K+2)^{\text{ième}}$ (les 7e et 20e pour 32 cartes).

Pour chercher le nombre $q=\varphi(n)$ de fois qu'il faut faire le mélange pour retrouver la disposition initiale, divisons un cercle en parties égales par $2m+1=4n+1$ points numérotés en tournant dans le sens trigonométrique : 1, 2, 3, ..., $2n-1$, $2n$, $2n$, $2n$, $2n-1$, ..., 3, 2, 1. Si l'on part du dernier des trois numéros consécutifs $2n$ et si l'on compte de 2 en 2, on trouve précisément la liste des cartes après le premier mélange. En partant du point suivant numéroté $2n-1$ et comptant de 2^2 en 2^2, on trouve la liste après le deuxième mélange, etc. Il en résulte que l'on trouve la disposition initiale pour la plus petite valeur de q telle que $4q-1$ soit divisible par $4n+1$ si l'un des deux nombres $2q+1$ l'est aussi. Sinon, il faut deux fois plus de mélanges.

Hudson [213] a montré en plus que pour une loi quelconque de mélanges on retrouverait la disposition primitive après un nombre de mélanges au plus égal au plus grand des plus petits communs multiples des nombres dont la somme est égale à n. Pour 52 cartes, ce nombre est 180180.

72. Rondes d'enfants. — D'un genre un peu différent sont les problèmes de rondes enfantines qui ont été soulevés et étudiés surtout par Lucas [217]. Dans un premier cas, $2n+1$ *enfants doivent faire n rondes telles que chaque enfant soit une fois et une fois seulement le voisin de chacun des autres.* Ce problème, comme les suivants, comporte un grand nombre de solutions différentes. Si l'on trace un polygone régulier (P) de $2n+1$ sommets, on peut représenter chacune des rondes par un polygone (Q) à $2n+1$ côtés formés de côtés et de diagonales de (P). L'ensemble des diverses rondes

[233] correspond à la réunion des divers polygones (Q) dont la superposition donne le réseau formé par (P) et toutes ses diagonales. On pourrait se demander combien il existe de tels découpages qui soient essentiellement distincts, mais cette question n'a pour ainsi dire pas été étudiée et nous nous bornerons à indiquer que l'on trouve dans Lucas [217] des solutions toujours possibles de ce problème et des nombreuses variantes que l'on en peut donner.

Dudeney traite de façon analogue [200] le problème suivant : *Placer en rond n personnes de façon que chacune soit une fois et une fois seule entre tous les autres couples possibles de deux autres personnes*, ce qui représente $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dispositions. Il a obtenu une méthode valable pour tous les cas et donne la liste des solutions jusqu'à $n=25$.

73. **Ménages.** — Tel que l'expose Lucas [222], *le problème des ménages* est le suivant : *n femmes étant rangées autour d'une table, de combien de façons peut-on placer les n maris si un homme est assis entre deux femmes sans se trouver à côté de la sienne* [180] ? Ceci revient à chercher les permutations *discordantes* avec les deux suivantes : $1, 2, \ldots, n$ et $2, 3, \ldots, n-1, 1$. Laisant et Moreau [222] ont donné séparément des résultats analogues. En désignant par p_n le nombre cherché et posant $p_n = 2(-1)^n + n_n$, on peut calculer les S par les formules de récurrence très simples :

$$p_n = S_{n+1} - S_{n-1}, \qquad S_{n+1} = nS_n + S_{n-1} + 2(-1)^n.$$

74. **Promenades.** — Divers auteurs se sont occupés du problème des promenades. Dans le cas le plus simple, on a un pensionnat de $2n$ jeunes filles qui sortent chaque jour par rang de deux. Il faut qu'au bout de $2n-1$ jours, chaque jeune fille ait été une fois et une seule avec chaque autre. Lucas [217] donne une solution de ce problème analogue à celles qui précèdent. Il examine aussi le cas où il y a $2n-1$ jeunes filles et où l'une d'elles joue chaque fois le rôle de monitrice.

75. **Quinze demoiselles.** — Ce problème célèbre et qui a provoqué de nombreuses recherches mathématiques est dû à Kirkman, qui l'a posé en 1851 [216] : *Quinze jeunes filles se promènent chaque*

jour trois par trois, comment les disposer si l'on veut que chacune se trouve une fois et une seulement en compagnie de chacune des autres [217, 230]. La place des jeunes filles dans chacune des rangées de trois ou *triades* n'intervient pas. Signalons pour mémoire que l'on peut donner de ce problème une interprétation géométrique en considérant des triangles n'ayant que des sommets communs, mais non des côtés.

Cette question et les extensions qu'on en peut donner ont provoqué de nombreuses études que nous ne ferons que signaler, en particulier de Frost [210], Walecki [242], Anstice [185], Peirce [228], Gill [212], etc.

X. — Jeux d'échiquier.

76. Jeux d'échiquier. — Dans ce Chapitre devraient prendre part un grand nombre de jeux qui se jouent sur un *échiquier* ou un *damier* de n^2 cases, jeux dont les pièces ont des positions indiquées par des points de croisement d'un quadrillage et habituellement se déplaçant suivant les lignes de ce quadrillage.

Nous nous bornerons à une simple énumération pour la plupart d'entre eux, car leur étude mathématique est peu avancée et que, d'autre part, leurs définitions, leurs caractéristiques, les règles à suivre sont exposées dans les traités classiques et tout particulièrement dans ceux de Lucas [286] ou Rouse-Ball [6].

Nous citerons ainsi le *taquin*, connu à l'étranger sous le nom de *boss-puzzle* ou *jeu des quinze* (15-*puzzle*), le jeu de *caméléon*, le *paradoxal tricolore*, le *solitaire* (en allemand *nonnenspiel*), au sujet duquel il convient de citer les théories du *solitaire étendu*, le jeu de *dames*, celui de *chiens et loups*, des *larrons et latroncules*, de la *patte d'oie* et de la *pettie*.

77. Échecs. — Le jeu d'échecs, qui est trop connu pour que nous en rappelions les caractéristiques, a donné naissance à de très nombreux travaux mathématiques dont la plupart sont des problèmes posés sur des pièces du jeu : *marche du cavalier* [*M.*, p. 50 et 285], *problème des* 8 *reines* [*M.*, p. 47 et 285]. Un très petit nombre concerne le jeu lui-même : étude des derniers coups constituant le mat

[**263**, **292**], étude du nombre de façons de jouer les premiers coups [**260**, **268**, **272**], étude de positions correspondantes, etc. Dans les revues spéciales et les nombreux traités sur le jeu d'échecs, on ne trouve que des études de coups difficiles, des conseils aux joueurs, etc. On convient parfois de considérer l'échiquier comme cylindrique, les deux bords de droite et de gauche étant supposés soudés, ce qui étend le champ d'action de certaines pièces.

78. Trafalgar. — Parmi les jeux dérivés des jeux de dames ou d'échecs et dont ne font guère mention les traités classiques, citons celui de *trafalgar*, dérivé du jeu allemand de la guerre (*kriegspiel*). Chaque joueur a un échiquier distinct et ne voit pas les pièces de l'adversaire. Chaque partenaire a trois vaisseaux : un *cuirassé*, un *torpilleur* et un *sous-marin*, dont le rayon d'action, la mobilité et la vulnérabilité aux coups sont différents pour les trois pièces. Chaque joueur tire des coups de canon un peu à l'aveuglette et ne fait que présumer la position de l'adversaire, position qu'il déduit approximativement à chaque instant de la nature des coups tirés par cet adversaire et de l'endroit où ils sont tombés. Il y a là un grand élément d'intérêt assez rarement utilisé.

79. Halma. — Le jeu de Halma [**248**, **253**, **299**] est très répandu dans certaines parties de l'Europe. Dans le cas le plus usuel, deux joueurs ont un échiquier de 256 cases sur lequel l'un d'eux place 19 jetons blancs sur les cases 00, 01, 02, 03, 04, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40 et 41 en notant, comme le proposa pour le jeu de dames Vandermonde [**325**], une case d'abscisse α et d'ordonnee β par $\alpha\beta$. L'autre joueur pose 19 jetons noirs sur les cases diamétralement opposées. Chaque jeton se déplace comme le *roi* aux échecs et peut, en outre, faire un *saut* par-dessus tout pion immédiatement voisin, qu'il soit ou non de sa couleur, mais sans le supprimer. Chaque *coup* comprend un pas ou un ou plusieurs sauts consécutifs. Le gagnant est celui qui a pu le premier mettre tous ses pions aux places occupées au début par son adversaire. Chaque joueur essaie ainsi de former à l'aide de ses pions et de ceux de l'adversaire des échelles qui facilitent sa progression et qu'il démolit aussitôt après usage pour empêcher l'adversaire de les utiliser à son tour.

XI. — Jeux de situation.

80. Reversi. — Nous examinerons dans ce dernier Chapitre des jeux qui, quoique parfois analogues aux précédents, en diffèrent surtout parce qu'on y introduit des préoccupations nouvelles comme celles de réaliser avec des jetons certaines figures et en particulier certains alignements.

Le *Reversi* [**331**] se joue habituellement sur un échiquier de 100 cases sans que la couleur des cases intervienne. Au début, on pose côte à côte deux jetons blancs et au-dessous deux jetons noirs de façon à garnir les cases du carré central. Dans la suite du jeu, toutes les fois que l'un des joueurs peut encadrer un alignement de p jetons de l'adversaire entre deux jetons lui appartenant, alignement parallèle à une ligne, à une colonne ou à une diagonale, il les prend, c'est-à-dire qu'il substitue à ces p jetons, p jetons de sa couleur. Les joueurs qui jouent alternativement doivent *prendre* à chaque coup, sinon ils *passent*, ce qui, d'ailleurs, n'arrive guère. Le gagnant est celui qui a le plus de pions. A chaque coup il y a un jeton en plus sur l'échiquier : donc il faut 96 coups pour terminer la partie. La pratique montre qu'il est important, pour ne pas être débordé par l'adversaire, de s'adosser le plus possible à l'un des bords de l'échiquier et même de conquérir les coins.

81. Go-Bang. — Plus compliqué dans ses combinaisons est le *Go-Bang*, connu au Japon depuis la plus haute antiquité [**332**, **344**, **347**]. Il se joue avec un nombre quelconque de jetons, par exemple 56, sur un échiquier aussi grand qu'on le veut : 16^2, 18^2, 20^2, ... cases. Les joueurs A et B posent alternativement un pion où ils le veulent. Le gagnant est celui qui a réalisé le premier un alignement de 5 pions consécutifs parallèlement à une ligne, une colonne ou une diagonale. Si tous les pions sont placés avant la fin, on les déplace ensuite comme le *roi* aux échecs.

Celui qui joue le premier peut toujours placer 3 jetons en ligne droite au troisième coup et arrive facilement à en placer 4, mais pour en placer 5, il lui faut 30 à 40 coups au moins. Ce jeu a des combinaisons extrêmement variées et il est beaucoup plus difficile qu'aux échecs, malgré la très grande simplicité des règles d'y jouer sans faute.

Parmi les variantes, signalons la possibilité pour chaque joueur d'envelopper complètement un pion adverse qui est alors enlevé du jeu. Le joueur qui a fait le plus de prises a gagné. Le nombre total des jetons est aussi celui des cases.

82. **Marelles et autres jeux.** — Signalons pour mémoire divers jeux sur lesquels on trouvera des renseignements suffisants dans les traités classiques et plus particulièrement dans celui de Lucas [5, 342] : la *marelle simple*, la *marelle triple*, le *jeu national*, la *marelle quadruple*, le *jeu du renard et des poules* et le *jeu militaire*.

83. **Jonction de points.** — Flye Sainte-Marie et Delannoy [336, 337], considérent n points marqués sur une feuille de papier et deux partenaires A et B jouant alternativement un *coup* chaque fois qu'ils joignent deux points par un trait ne passant par aucun autre point. Chaque point ne peut servir d'extrémité à plus de deux traits et deux traits ne doivent pas se croiser. Le premier des deux joueurs qui ne peut plùs jouer a perdu.

On peut noter que, si A trace un trait qui en prolonge un autre, B peut riposter en fermant la *chaîne* ainsi commencée. Il est donc inutile de s'occuper de tels coups. La partie est perdue par B si A lui livre un jeu ne contenant que des traits ou bien un trait ou un point. Pour les premières valeurs de n, on voit que si A est le premier joueur, il gagne pour $n = 2$, 3 ou 7 et perd pour $n = 0, 1, 4, 5, 6$. Pour les valeurs plus grandes de n, on verra que si $n = 4m$ ou $4m + 1$ ou $4m + 2$, A perd et gagne si $n = 4m + 3$. En définitive, sauf si $n = 2$, A ne gagne que si $n + 1$ est multiple de 4.

84. **Jeu de l'X.** — Beaucoup plus varié est le *jeu de l'X* [334, 342, 346, 348]. Sur un quadrillage limité, mais de dimensions arbitraires, les joueurs A et B repassent à l'encre, à chaque *coup*, un côté de carré. Si B livre à A un carré dont trois côtés soient ainsi tracés, A ferme le carré, y inscrit un signe distinctif et rejoue un coup. Il arrive souvent qu'il y ait de longs couloirs à bords parallèles avec des parties rectilignes et de nombreuses courbes à angle droit. Si B ferme une extrémité d'un tel couloir, il livre par cela même à A,

en une seule fois, les p carrés du couloir. A ne s'arrête que lorsqu'il arrive à la seconde extrémité du couloir ou s'il débouche dans un carrefour. Il reste d'ailleurs à ce moment-là un coup à rejouer pour A.

B et A reculent le plus possible le moment de livrer ainsi des séries de carrés. Mais vers la fin du jeu chaque trait livre un couloir de p carrés à l'adversaire. Les nombres p étant tous connus d'avance, on est ramené à considérer un ou plusieurs réseaux dans lequel un trait isolé représente un couloir ouvert aux deux bouts et des traits assemblés des couloirs avec carrefours. Chacun de ces traits a une valeur p connue et alternativement chaque joueur ajoute à son compte celui de ses traits que lui abandonne l'autre. Il serait alors facile de savoir qui va gagner s'il n'y avait pas la complication des carrefours, car une fois supprimé le trait qui aboutit à un sommet de degré 3, les deux traits restants se soudent en un seul et leurs nombres p se totalisent. Il y a d'autres singularités, mais nous nous bornerons à ces brèves indications.

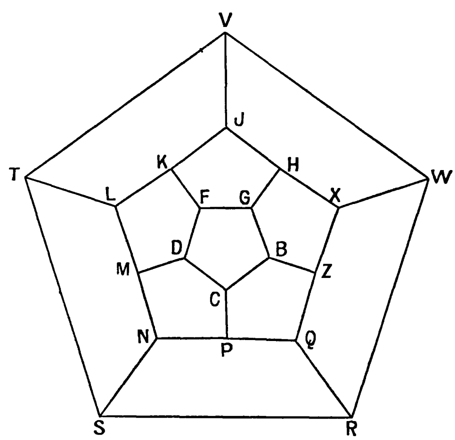
85. **Croix-en-quatre.** — Parmi les jeux de situation, on peut citer pour mémoire ceux des *parquets anallagmatiques* [345], le jeu de *parquet* [342], les récréations de Mac-Mahon [297], qui consistent à disposer des éléments géométriques donnés de façon à former des dispositions variées. C'est ainsi que le *jeu de la croix-en-quatre* [345] utilise 16 jetons carrés séparés en deux par une diagonale. La partie supérieure est jaune, rouge, rose ou bleue; la partie inférieure dorée, verte, noire ou blanche, deux jetons n'étant jamais identiques. Il faut les disposer en carré de telle façon qu'il y ait 8 couleurs seulement par horizontale, verticale ou par diagonale, ou seulement 6 couleurs dans chacun de ces alignements, 5 ou même 4.

86. **Cubes coloriés.** — Si des jeux « plans » nous passons aux jeux « spatiaux », beaucoup moins nombreux, nous trouvons d'abord les *jeux de cubes coloriés* [343]. Prenons 30 petits cubes de mêmes dimensions, dont les six faces sont teintes avec des couleurs données α, β, γ, δ, ε, φ, deux cubes quelconques n'étant jamais superposables, ce qui correspond précisément à 30 combinaisons.

Prenons maintenant un des petits cubes A. On se propose de construire avec 8 de ces petits cubes convenablement choisis un cube A' de dimensions doubles de A et colorié comme lui, avec en plus la restriction que deux à deux les faces en contact des petits cubes soient de même couleur. On établit qu'il est possible d'une seule façon de choisir ces 8 petits cubes et qu'il y a deux façons différentes de les assembler pour obtenir le résultat demandé.

87. **Jeu Icosien** [338, 339, 340, 342, 343, 345]. — Ce jeu se joue à l'aide d'un dodécaèdre régulier en bois tenu par un manche, et à chaque sommet duquel se trouve un petit clou. Tout trajet de sommet à sommet sera représenté par une ficelle enroulée autour des clous. On peut aussi construire un réseau plan homéomorphe (*fig.* 10, p. 53), et dont nous supposerons les sommets marqués

Fig. 10.



avec les 20 consonnes. Elles servent d'initiales dans le jeu proposé par Hamilton à vingt grandes villes : Bruxelles, Canton, etc. On se propose de faire sur ce dodécaèdre un voyage autour du monde en passant par tous les sommets une fois et une seulement, les cinq villes initiales étant fixées.

Voici la méthode suivie par Hamilton. A chaque sommet, on peut tourner à droite : δ ou à gauche : γ. Tout voyage peut ainsi être représenté par une suite de δ et de γ. On établit les égalités schématiques

$$\gamma\delta^2\gamma = \delta\gamma\delta, \qquad \gamma\delta^3\gamma = \delta^2, \qquad \gamma^5 = 1$$

et les égalités analogues obtenues en permutant δ et γ. La dernière des relations ci-dessus exprimant que l'on retourne au point de départ, on en déduit successivement

$$\begin{aligned} 1 = \gamma^5 = \gamma^2\gamma^3 = (\delta\gamma^3\delta)\gamma^3 = (\delta\gamma^3)^2 \\ = \delta(\delta\gamma^3\delta)\gamma^2 = (\delta^2\gamma^3\delta\gamma)^2 = [\delta^2(\delta\gamma^3\delta)\gamma\delta\gamma]^2 = (\delta^3\gamma^3\delta\gamma\delta\gamma)^2, \end{aligned}$$

ce qui représente justement un voyage de 20 sommets répondant à la question. Il en est de même de celui que l'on obtient en échangeant δ et γ. C'est d'ailleurs un voyage circulaire que l'on peut faire commencer n'importe où. Tout ensemble de 5 sommets fixés d'avance correspond à une certaine disposition des lettres δ et γ qui est toujours possible. Cette étude se rattache de façon très étroite à celle des racines cinquièmes de l'unité [338].

Hermary [339] a donné une méthode ingénieuse pour résoudre le même problème en remarquant que tout voyage passant par les 20 sommets et revenant au point de départ partage la surface du dodécaèdre en deux bandes de 6 pentagones. Partant de là, il est toujours facile à partir d'un début imposé de découper de telles bandes de polygones et de résoudre le problème.

Dans le cas où le nombre n des sommets imposés au début est différent de 5, le nombre n des voyages possibles peut dépendre du choix de ces sommets et est donné par le tableau suivant :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8 ou 8 plus
$N =$	30	20	10	6 ou 4	4 ou 2	3, 2, 1 ou 0	2, 1 ou 0	1 ou 0

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Abréviations.

A. F. .... Association française pour l'avancement des Sciences.
A. Gr. .... Archiv der Mathematik und Physik (Leipzig).
A. D. M. .... Annali di Matematica pura ed applicata (Roma).
A. J. M. .... American Journal of Mathematics.
An. M. .... Annals of Mathematics (Princeton).

B. M.	Bibliotheca mathematica (Stockholm, Leipzig).
B. P. M.	Bulletin physico-mathématique (Saint-Pétersbourg).
C. M. J.	Cambridge mathematical Journal.
C. R.	Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris).
Cr.	Journal de Crelle (reine und angew. math.).
D. Sch.	Deutsche Schachzeitung.
Ek.	Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.
E. M.	Enseignement mathématique.
E. T. R.	Educational Times reprints.
I. M.	Intermédiaire des Mathématiciens.
J. M.	Journal de Liouville (Mathématiques pures et appliquées).
L. G. D.	Lady's and Gentlemen Diary.
M. A.	Mathematische Annalen.
M. M.	Messenger of mathematics (London, Cambridge).
M. S. B.	Procès-verbaux Société des Sciences Bordeaux.
N. A.	Nouvelles Annales de Mathématiques.
N. A. W.	Nieuw Archief voor Wiskunde.
N. C.	Nouvelles Correspondances mathématiques (Bruxelles).
N. P.	Nature Paris.
N. W.	Naturwissenschaft Wochenschrift.
P. L. M. S.	Proceedings London Mathematical Society.
P. R. S. E.	Proceedings Royal Society Edimburgh.
P. M.	Philosophical Magazine.
Q. J.	Quarterly Journal of Mathematics.
R. B. A.	Reports Britisch Association.
R. C. M. P.	Rendiconti circolo Mathematico Palerme.
Sch.	Schachzeitung.
S. M.	Bulletin Société mathématique de France.
S. M. Am.	Bulletin American Mathematical Soc. (New-York).
Z. H.	Zeitschrift für math. und naturw. Unterrich (Leipzig).
Z. S.	Zeitschrif für Math. und Phys. (Leipzig

Ouvrages généraux et divers.

M. SAINTE-LAGUË (A.). — Les Réseaux ou graphes (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XVIII, 1926).

1. A. AHRENS (W.). — Mathematische Unterhaltungen und Spiele, I et II (Leipzig, 1910-1918).

2. D. I. DUDENEY (H. E.). — The Canterbury Puzzles (London 1919).

3. D. II. DUDENEY (H. E.). — Amusements in Mathematics (London 1917).

4. E. ERRERA (A.). — Du coloriage des cartes et de quelques questions d'*Analysis situs* (Paris, 1921).

5. L. LUCAS (E.). — Récréations mathématiques, I, II, III et IV (Paris, 1921).

6. R. B. Rouse Ball (W.). — Récréations mathématiques (traduction Fitz Patrick), I, II et III (Paris, 1907-1909).
7. S. L. Sainte-Laguë (A.). — Manuscrits inédits.

Introduction.

1, 2, 3, 4, 5, 6, et :

8. Aubry (A.). — Polygone décomposé en parties identiques (*I. M.*, 1907, p. 122).
9. Bellavitis (G.). — Problema di posizione (*B. P. M.*, XVI, 1857, n° 365).
10. Brunel (G.). — Recherches sur les réseaux (*M. S. B.*, 1895, p. 165-215).
11. Chuard (A.). — Questions d'*Analysis situs* (*R. C. M. P.*, 1922, p. 185-224).
12. D. — Questions diverses.
13. Dehn (M.) et Heegard (P.). — *Analysis situs* (*Ek.*, III, 1re partie, cahier I, 1907, p. 153-220).
14. Delastelle (F.) — Traité élémentaire de cryptographie (Paris, 1902).
15. Denjoy (A.). — *Analysis situs* du plan (*C. R.*, 1911, p. 423 426 et 493-496).
16. Errera (A.). Sur le problème des quatre couleurs (*A. E.*, 1924, p. 96-99).
17. Fourrey (E.). — Curiosités géométriques (Paris, 1920).
18. Hadamard. — La géométrie de situation et son rôle en mathématiques (*Revue du mois*, 1909).
19. Ignatieff (E.). — Au règne du bon sens (en russe) (I, II, III, Moscou, Petrograd, 1923).
20. Laisant (C. A.). — Recueil de problèmes (Paris, 1895).
21. Lemoine. — Routes ne se recoupant pas (*I. M.*, 1901, p. 6).
22. Lévy (L.). — Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers [*Bulletin Société Philomathique* (8), III, 1891, p. 46-50].
23. Listing (J.). — Vorstudien zur Topologie (*Göttinger Studien*, 1847). — Census räuml Kompl. (Göttingen, 1862).
24. Lucas (E.). — Théorie des nombres (Paris, 1891).
25. Muser. — Récréations arithmétiques (Munster, 1831).
26. Petersen (J.). — Die Theorie der regulären Graphs (*Acta mathematica*, XV, 1891, p. 193-220).
27. Quijano. — Figures distinctes formées avec *n* carrés (*I. M.*, 1908, p. 195).
28. Robin. — Carrelage illimité en polygones réguliers (*N. P.*, XV, 1887, p 95-96).
29. Rouse-Ball (W.). — Mathematical Recreations et Problems (I, II, London, 1893).
30. Sainte-Laguë (A.). — Les réseaux (Paris ou Toulouse, 1924). — Les réseaux (*C. R.*, 1924).

31. SUNDARA ROW (T.). — Geometrical exercises in paper-folding (Madras, 1893).
32. VIARIS (de). — l'Art de déchiffrer les dépêches secrètes (Paris, 1890?).
33. VINOT (J.). — Récréations mathématiques (Paris, 1893).
34. WIENER (Ch.). — Ueber eine Aufgabe aus der Geometria Situs (*M. A.*, VI, 1873, p. 29-30).

I. — Régions.

4 et :

35. BIOCHE (Ch.). — Permutatutions polyédriques (*S. M.*, XXXIII, 1905, p. 88).
36. BRICARD (R.). — Peut-on développer un polyèdre (renseignements communiqués par l'auteur, 1917).
37. BRUNEL (G). — Configurations régulières sur des surfaces quelconques (*M. S. B.*, 1898).
38. CAYLEY. — Sur les courbes de niveau et les lignes de pente [*P. M.*, (4), XVIII, 1859, p. 264-268; *Collected Works*, IV, p. 108-111]. — Formule de Descartes-Euler [*P. M.*, (3), XXI, 1861, p. 424-428].
39. CHUARD (J.). — Propriétés des réseaux cubiques tracés sur une sphère (*C. R.*, 8 janvier 1923).
40. DESCARTES. — Œuvres inédites (Paris, II, 1860, p. 214).
41. EULER. — Novi Comentarii Academ. Petropolit. Petrograde (1752).
42. HADAMARD. — Une erreur de Cauchy (*I. M.*, 1907, p. 31).
43. HENDLÉ. — Régions délimitées par coniques (*I. M.*, 1899).
44. KUBOLA (T.). — Partitioning of the Plane by Polygons (*Tôhoku Mathematical Journal*, XXIV, 1925, p. 273-276).
45. L., IV, p. 156-162.
46. LAISANT. — Régions du plan et de l'espace (*A. F.*, 1881, p. 71-76). — Régions et aspects (*S. M.*, X, 1881-1882, p. 52).
47. LEBESGUE (H.). — Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler (*S. M.*, XLIV, 1924, p. 315-336).
48. MARONI (A.). — Il teorema Descartes-Eulero relativo al poliedri [*Periodico di matematica* (4), I, 1921, p. 337-346].
49. MAXWELL (J. Clerk). — Sur les montagnes et les vallées [*P. M.*, (4), XL, 1870, p. 421-427; *Collected Works*, II, p. 233-240].
50. MERLIN (E.). — Configurations (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, III, vol. 2, fasc. 1, p. 148).
51. MÜLLER. — Ein neuer Beweiss des Eulerschen Satzes (*Z. H.*, XLV, 1914, p. 178-181).
52. PERRIN. — Problème des aspects (*S. M.*, X, 1891-1882, p. 103). — Aspects et configurations (*I. M.*, 1894, question 27).
53. R. B., II, p. 17.
54. S. L. — Permutations et tresses. — Notation d'une carte.
55. STEINER. — Cité par WECKE (G.) (*Voir* 56).

56. **Wecke** (G.). — Nature des faces d'un polyèdre dont le nombre est connu (*I. M.*, 1912, p. 145).

II. — Cartes simples.

4, 29, 30 et :

57. S. L. — Réseaux losangés et triangulés.
58. **Sainte-Laguë** (A.). — Comptes rendus (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1924).

III. — Théorème des quatre couleurs (1).

1, 4, 5, 6, 25 et :

59. **Ballantine** (Ph. D.). — A Postulational Introduction to the four Color Problem (non imprimé. Université de Chicago, 1923; 53 pages).
60. **Borel** (E.), **de Jonquières, Delannoy, Lucas, Ramsey**. — Problème de la Carte (*I. M.*, 1894, p. 192).
61. **Borel** (E.). — Théorème de Tait (*I. M.*, 1895, p. 8).
62. **Brahana** (A.). — A Proof of Petersen's Theorem (*An. M.*, 1917, p. 59-63).
63. **Brahana** (H. R.). — Riemann Surface on the Map Problem (*S. M., Am.*, XXIX, 1923, p. 198). — The Four Color Problem (*American mathematical Mon.*, XXX, 1923, p. 234-243).
64. **Brocard**. — Polyèdre à arêtes affectées d'indices (*I. M.*, 1895, p. 232).
65. **Cama** (B. N.). — Solution d'une question sur le coloriage des cartes (*E. T. R.*, LXXII, 1900, p. 103 104).
66. **Cayley**. — On the colouring of maps (*P. L. M. S.*, IX, 1878, p. 148; *Procedings Royal Geogr. Society*, Londres, I, 1879, p. 259-261), (*Collected Papers*, IX, n° 707, p. 71, Cambridge, 1889.
67. **Chuard** (J.). — Problème des quatre couleurs (*E. M.*, XXII, 1923, p. 372-376). — Réseaux cubiques sur la sphère (*E. M.*, XXIII, 1923, p. 209).
68. **Delannoy**. — Théorème de Tait (*I. M.*, 1895, p. 8 et 232). — Les quatre couleurs (*I. M.*, 1896, p. 225 et 817).
69. **Errera** (A.). — Une démonstration du théorème de Petersen (*Mathesis*, XXXVI, 1922, p. 56-61). — Une contribution au problème des quatre couleurs (*S. M.*, LIII, 1925, p. 42-55). — Exposé historique du problème des quatre couleurs [*Periodico di Mathematiche*, (4), VII, 1927, p. 20-41].
70. **Errera** (A.). — Le problème des quatre couleurs (*E. M.*, XXIII, 1923, p. 95-96). — Sur le problème des quatre couleurs (*A. F.*, 1924, p. 95-96).

(1) On trouvera plus particulièrement ici la bibliographie générale concernant l'étude du coloriage des cartes.

71. FITTING (F.). — Ueber das Problem der Rundreise und einen damit im Zusammenhang stehenden Satz von Tait [*N. A. W.*, (2), XIII, 1921, p. 348-360].
72. FRINK (O.). — A Prof of Petersen's Theorem (*An. M.*, XXVII, 1926, p. 491-493).
73. GOURSAT. — Sur le théorème des quatre couleurs (*I. M.*, 1894, p. 213). — Sur le théorème de Tait (*I. M.*, 1898, question 360).
74. GUTHRIE (F.). — Note sur l'énoncé donné par son frère (*P. R. S. E.*, X, 1880, p. 727-728).
75. HEFFTER (L.). — Ueber metacyklische Gruppen und Nachtbarconfigurationen (*M. A.*, L, 1898, p. 261-268). — Ueber Nachbarconfigurationen, Tripelsyteme und metacyklische Gruppen (*Jahresberichte Deutsch Math. Ver. Leipzig*, V, 1896, p. 67-68).
76. HUNZIKER (G.). — Ueber das Kartenfarbungs problem (*Thèse*, Zurich, 1924, 62 pages).
77. KEMPE. — On the geographical problem of the four colours [*A. J. M.*, II, (3), 1879, p. 193-200], (*P. L. M. S.*, X, 1879, p. 229-231), (*Nature Londres*, XXI, 1889, p. 399-400).
78. KIRKMANN. — Les quatre couleurs (*E. T. R.*, 1881, p. 113).
79. L. — Le problème géographique des quatre couleurs (IV, p. 168-194).
80. LA VALLÉE POUSSIN. — Les quatre couleurs (*I. M.*, 1896, p. 179).
81. LEMOINE. — Sur le théorème de Tait (*I. M.*, 1899, p. 36-38).
82. LHUILIER. — (*Annales de Mathématiques pures et appliquées de Gergonne*, III, 1812-1813, p. 169-189).
83. LISTING. — *Analysis situs* (*Abhandlungen K. Gesellschaft-Wiss. Göttingen*, X, 1862, p. 97-182).
84. LUCAS. — Les quatre couleurs [*Revue scientifique* (3), VI, 1883, p. 12-17].
85. MADDISON (J.). — Note on the history of the map-coloring problem [*S. M. Am.*, (2), III, 1896-1897, p. 264-303].
86. MANSION. — Problème de la Carte (*I. M.*, 1894, p. 20).
87. MORGAN. — Cité par GUTHRIE (F.) (*Voir* 74).
88. PETERSEN (J.). — (*I. M.*, 1894, p. 192); Sur le théorème de Tait (*I. M.*, 1898, p. 225-227; 1899, p. 36-38).
89. POLIGNAC (G. de). — Sur le théorème de Tait (*S. M.*, XXVII, 1899, p. 142-145).
90. SAINTE-LAGUË (A.). — Réseaux unicursaux et bicursaux (*C. R.*, 30 avril 1926).
91. S.-L. — Chaînes de Tait.
92. STORY (W. F.). — Note on the preceding paper (suite à une Note de KEMPE : *Voir* 77) [*A. J. M.*, II, (3), 1879, p. 201-204].
93. TAIT (P. G.). — Note on a Theorem in Geometry of Position (*Transactions Edinburg*, XXIX, 1880, p. 657-660). — On the colouring of maps (*P. R. S. E.*, X, 1880, p. 501-503). — Remarks on the previous Communication [suite à une Note de GUTHRIE (F.) : *Voir* 74], (*P. R. S. E.*, X, 1880, p. 729).

94. WERNICKE. — On the solution of the Map color problem [*S. M. Am.*, (2), IV, 1897, p. 5].
95. WILLAERT (R. P.). — [*Annales des Sociétés scientifiques Bruxelles*, XXXVIII, (2), 1914, p. 115. — XXXIX, (1), 1920, p. 69-71].
96. WILSON (J. C.). — On a supposed solution of the four-colour problem (*The Mathematical Gazette*, III, 1906, p. 338-340).

IV. — Chaînes.

1, 4, 5, 6, 8, 4 et :

97. E. — (p. 47 et 55).
98. HEAWOOD (P. J.). — Map. Colour Theorem (*Q. J.*, XXIV, 1890, p. 332-338). — On the 4 colour Map theorem (*Q. J.*, XXIX, 1898, p. 270-285).
99. VEBLEN (O.). — An Application of modular equations in *Analysis situs* (*An. M.*, XIV, 1912-1913, p. 86-94).
100. VEBLEN (O.) et ALEXANDER (J. W.). — Manifolds of *n* dimensions (*An. M.*, XIV, 1912-1913, p. 163-178).

V. — Anneaux.

1, 4, 5, 6, 8, 4 et :

101. BALTZER (R.). — (*Berichte Math. Phys. Klasse Leipzig*, XXXVII, 1885, p. 2).
102. BIRKHOFF (G. D.). — A Determinant formula for the number of ways of coloring a map [*An. M.*, XXXV, (2), 1912-1913, p. 42-46]. — The reducibility of Maps [*A. J. M.*, XXXV, (2), 1913, p. 115-128].
103. FRANKLIN (Ph.). — The Four Color Problem (*A. J. M.*, XLIV, 1922, p. 225-236).
104. KIRKMANN. — Anneaux [*Mem. litt. and phil. Society Manchester*, (2), XII, 1855, p. 47-70].
105. MÖBIUS. — [1840, cité par BALTZER (R.) : *Voir* 101].
106. REYNOLDS (C. N.). — Note on the Map Coloring Problem (*S. M. Am.*, XXX, 1924, p. 220); On the Problem of Coloring Maps in Four Color (*An. M.*, XXVIII, 1926, p. 1-15 — 1927, p. 477-492). — Some news methods of approaching the four color problem (*Procedings of the West Virginia Ac. of. Sc.*, I, 1927, p. 91-97).
107. S. L. — Anneaux de régions. — Pentagones et hexagones d'un réseau.
108. WERNICKE. — Ueber den Kartographischen Kirfarbensatz (*M. A.*, LVIII, 1904, p. 413-426).

VI. — Problèmes divers.

1, 4, 6 et :

109. A. — (II, p. 219).
110. DIXON (A. C.). — On Map colouring (*M. M.*, XXXII, 1902-1903, p. 81-83. — *R. B. A.*, LXXXIII, 1913, p. 399).

111. E. — (p. 43, 57, 58 et 62).
112. HEFFTER. — Ueber das Problem der Nachbargebiete (*M. A.*, XXXVIII, 1891, p. 477).
113. MONTESSUS (de). — Coloriage des Cases d'un échiquier (*I. M.*, 1897).
114. ROCQUIGNY (de). — Coloriage des Cases d'un échiquier (*I. M.*, 1896, p. 31).
115. SCHOUTE. — Mehrdimensionale Geometrie (Leipzig, 1905, II, p. 51).
116. S. L. — Coloriages particuliers.
117. STÄCKEL (P.). — Ueber Nachbargebiete im Raume (*Z. S.*, XLII, 1897, p. 275-276).
118. TIETZE (H.). — Ueber das Problem der Nachbargebicte im Raum (*Monatshefts für Mathem und Physik*, XVI, 1905, p. 211-216. — Einige Bernerkungen über das Problem der Kartenfä'rbens auf einseitigen Flächen (*Deutsche Mathem-Vereinigung Jahresbericht*, XIX, 1910, p. 155-159).

VII. — Jeux linéaires ([1]).

1, 2, 3, 5, 6, 15, 17, 18, 33, 35 et :

119. AHRENS (W.). — Mathematische Spiele (*Ek.*, I, 2e Partie, Cahier 8, 1902, p. 1080-1093). — Mathematik im Spiel und in der Liebe (*Zeitschrift für Bücherfreunde*, VIII, 1916, p. 81-95). — Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik (Berlin, 1918).
120.
121. AKAR (A.), VAN DORSTEN (A.-H.), WELSCH. — Décomposition des polygones (*I. M.*, 1895, p. 235).
122. ANTON (F.). — Encyklopädie der Spiele (1884).
123. AUBRY (A.). — Dé cubique qui roule (*I. M.*, 1903). — Note sur les permutations (*E. M.*, 1918, p. 199-205).
124. BELLAVITIS. — Giuoco Americano [*Atti dell Instituto Veneto*, (5), VI, 1879-1880, p. 901-904].
125. BIOCHE (Ch.). — Circuits avec les dominos (*I. M.*, 1894, question 68).
126. BOLTE (J.). — Der Mann mit der Ziege, dem Wolf und dem Kohle (*Zeitschrift des Vereins für Volkskund*, Berlin, XIII, 1903, p. 95-96).
127. BOUTIN (A.). — Nombre de dispositions de dominos (*I. M.*, 1902, p. 291).
128. BRICARD (R.). — Récréations mathématiques (*Écho des Turnes*, *École Centrale Paris*, 1er mars 1924).
129. BROCARD (H.). — Notes diverses (Jeu de dominos), (*N. C.*, IV, 1878, p. 45-50).
130. CZEPA (A.). — Mathematische Spielereien (Stuttgart, 1915).
131. D. I. (p. 134, p. 235). — D. II (p. 214).

([1]) On trouvera plus particulièrement ici la bibliographie générale concernant l'étude des jeux.

132. **Decerf** (A.). — Jeux divers (renseignements communiqués par l'auteur, 1925-1926).

133. **Delannoy** et **Laquière**. — Jeux de dominos (cité par L. II, p. 53 et 60).

134. **Delannoy**. — Problèmes des jetons (*N. P.*, juin 1887, p. 10). — Problèmes divers sur les jeux (*A. F.*, 1890). — Répartir *p* jetons entre *q* cases (*I. M.*, 1900, p. 165).

134*bis*. **Dudeney** (H. E.). — Modern Puzzles (London, 1926).

135. **Ernst** (G.). — Mathematische Unterhaltungen (Ravensburg, 1911).

136. **Falkener** (E.). — Games anciens and oriental... (London, 1892).

137. **Flye Sainte-Marie**. — Circuits de dominos (*I. M.*, 1894, p. 164-165, p. 265).

138. **Fourrey** (E.). — Récréations arithmétiques (Paris, 1899).

139. **Ghersi** (L.). — Matematica dittevole e curiosa (Milan, 1913).

140. **Grierson** (G.). — An American Puzzle (*The Indian Antiquary Bombay*, X, 1881, p. 89-90).

141. **Grosse** (W.). — Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beleuchtung (Leipzig, 1897).

142. **Haton de la Goupillière** (J.). — Théorie algébrique d'un jeu de société [*N. A.*, (4), X, 1910, p. 177-188].

143. **Hayashi** (T.). — Tait's problem with counters in the Japanese mathematics [*B. M.*, (3), VI, 1905, p. 323].

144. **Jackson**. — Rational amusements for winter evenings (London, 1824).

145. **Jones** (S.). — Mathematical Puzzles (New-Point. Texas, 1902?).

146. L. — I, p. 3-18.

147. **Laisant** (C. A.). — Cité par L., IV, p. 126. — Figuration graphique des nombres combinatoires (*A. F.*, 1895, p. 70-90).

148. **Le Cointe** (J.). — Chaîne aux dominos (*Cosmos*, XVI, 1890, p. 266-268 et 294-298).

149. **Lucas** (E.). — Géométrie des quinconces (*S. M.*, VI, 1877, p. 9). — Problèmes sur la géométrie des quinconces (*N. C.*, III, 1877, p. 412). — Amusements par les jetons (*N. P.*, XII, 1887, p. 10-11). — Arithmétique amusante (Paris). — Jeux scientifiques... (Paris, 1889, et *le Comos*, XV, 1890, p. 156-159).

150. **Müller** (L.). — Ueber ein heutiges Kinderspiel (*Jahrbücher für classische Philologie*, 1865, p. 217-223).

151. **Muser**. — Récréations arithmétiques (Munster, 1831).

152. **Nebolsine**. — (Renseignements communiqués directement à l'auteur : août 1925).

153. **Nesbitt** (A. M.). — Au sujet du jeu de dominos [*E. T. R.*, (2), XV, 1909, p. 105].

154. R. B. — II, p. 54-58.

155. **Reisb**. — Evaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu de dominos sont susceptibles... (*A. D. M.*, V, 1871, p. 63).

156. **Rivelly** (A.). — I giuocchi matematici (Napoli, 1887).

157. **Sainte-Laguë** (A.). — Récréations mathématiques (*Écho des Turnes*,

École Centrale Paris, 1er mars, 1er avril, 1er juin, 15 novembre 1925 et 1er mai 1926).
158. S.-L. — Pièces de monnaie. — Solitaire. — Problème de Tait.
159. SMYLY (G.). — Solution du problème des monnaies de Tait (*E. T. R.*, LIX, 1893, p. 45. — LXII, 1895, p. 42).
160. TAIT (P. G.). — Introduction Addr. Mathematical Society Edimbourg (1883). — Études sur les travaux de Listing [*P. M.*, (5), XVII, 1884, p. 30-40].
161. TAYLOR (H. M.). — A Problem on arrangements [*M. M.*, (2), XXXII, 1902-1903, p. 60 63].
162. TEYSSONNEAU (E.). — Cent récréations mathématiques (Paris, 1904).
163. VAN DORSTEN (H.). — Décomposition d'un polygone par ses diagonales (*I. M.*, 1894, p. 227).
164. WELSCH. — Problème de dominos (*I. M.*, 1910, p. 273-277).

VIII. — Autres jeux linéaires.

1, 2, 3, 4, 5, 6 et :

165. A. — I, p. 72, 84.
166. AHRENS (W.). — Nim, ein amerikanische Spiel mit mathematischer Theorie (*N. W.*, XVII, 1902, p 258-260).
167. ALLARDICE (R. E.) et FRASER (A. Y.). — (*Voir* FRASER).
168. ANONYME. — Théorie du baguenaudier par un clerc de notaire lyonnais (Lyon, 1872).
169. BOUTON (C. L.). — Nim, a game with complete mathematical theory [*An. M.*, (2), III, 1901, p. 35 39].
170. D. I. — (p. 24 et 118-120).
171. DELANNOY. — Jeu de la Tchouka (*I. M.*, 1895, p. 90).
172. FLYE SAINTE-MARIE. — Jeu de la Tchouka (*I. M.*, 1902).
173. FRASER (A. Y.). — (*Voir* 167). — La tour d'Hanoï (*P. R. S. E.*, II, 1483-1884, p. 50-53).
174. L. — I, p. 161 ; III, p. 55.
175. MOORE (E. H.). — A generalization of the game called Nim [*An. M.*, (2), XI, 1910, p. 93-94].
176. PARVILLE (H.). — La Tour d'Hanoï et la question du Tonkin (*N. P.*, XII, 1884, p. 285-286).
177. PURKISS (H. J.). — Ueber das Baguenaudier (*E. T. R.*, III, 1865, p. 66-67).
178. S. L. — Pliage de Papier. — Tchouka.
179. WYTHOFF (W. A.). — A modification of the Game of Nim [*N. A. W.*, (2), VII, 1907, p. 199-202].

IX. — Jeux circulaires.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 23 et :

180. A. — II, p. 73, 118.
181. AHRENS (W.). — Das Josephespiel... (*Archiv für Kulturgeschichte*, XI, 1913, p. 129-151).

182. **Akar** (A.), **Boutin** (A.), **Delannoy**, **Franel**, **Lemoine** (E.). — Problème de Josèphe (*I. M.*, 1895, p. 120-122). — **Moreau** (C.), (*I. M.*, 1895, p. 229).

183. **Anonyme**. — Les Concours illustrés. Problème de Caligula (*Écho des Concours*, p. 40).

184. **André** (D.). — Sur les Séquences (*C. R.*, 1883, p. 1356, *Annales École Normale Supérieure*, III, 1884, p. 121; *Bulletin de la Société Philomathique*, VIII, 1890, p. 153; *S. M.*, XXI, 1893, p. 131).

185. **Anstice** (R. R.). — On a problem in combinations (*C. M. J.*, VII, 1852, p. 279-292).

186. **Aubry** (A.). — Problème de Caligula (*I. M.*, 1906, p. 188, 190 et 215).

187. **Bienaymé** (A.). — Sur un problème de substitutions étudié par Monge [*N. A.*, (4), II, 1902, p. 443-446].

188. **Bills** (S.). — Problème des 15 demoiselles (*E. T. R.*, VIII, 1867, p. 82-83.

189. **Bonniakowski** (V.). — Battement des Cartes (*B. P. M.*, 1857, XV, p. 202-205), (*N. A.*, 1858, p. 66 67).

190. **Bourget** (J.). — Sur un problème de permutations successives nommé « battement de Monge » (*J. M.*, VIII, 1882, p. 413-434). — Note sur les permutations de n objets et sur leur classement (*N. A.*, 1883).

191. **Brunel** (G.). — Triades (*M. S. B.*, 1894-1895, p. 3, 47 et 56; 1895-1896, p. 6, 40 et 58; 1898-1899, p. 59 et 71; 1903, p. 1). — (*A. F.*, XXIV, 1895, p. 145-149 et 180); [*J. M.*, (5), VII, 1901, p. 305].

192. **Burnside** (W.). — On an application of the theory of groups to Kirkman's Problem (*M. M.*, XXIII, 1894, p. 137-143).

193. **Carpmael** (G.). — Some solutions of Kirkman's 15 School-girls problem (*P. L. M. S.*, XII, 1881, p. 148-156).

194. **Cayley** (A.). — On the triadic arrangements of 7 and 15 things [*P. M.*, (3), XXXVII, 1850, p. 50 53]; On a tactical theorem relating to the triads of 15 things [*P. M.*, (4), XXV, 1863, p. 59-60]; La Souricière (*Q. J.*, XV, 1878, p. 8-10).

195. **Cesaro**, **Franel**, **Akar** (A.), **Delannoy**, **Moreau**. — Jeu de Josèphe et Problème de Caligula (*I. M.*, 1894, p. 30-31 et 189-190).

196. **Clavero y Guervos**. — Triades (*I. M.*, 1899, p. 275).

197. **Cramer** (B.). — Lösung aller möglichen Stellungen des Spiel der Funfzehn (Boss-Püzzle) (Leipzig, 1880?).

198. **Cunningham** (A.) et **Whitworth** (W. A.). — *Voir* **Whitworth** (W. A.).

199. **Curtze** (M.). — Josephspiels (*B. M.*, VIII, 1894, p. 116; IX, 1895, p. 34-36).

200. D. H. — (p. 65, 80, 196, 205 et 206).

201. **Davis Ellery** (W.). — A geometric picture of the fifteen school girl problem (*An. M.*, XI, 1897, p. 156-157).

202. **Dickson** (L. E.). — Gergonne's pile problem (*S. M. Am.*, I. 1895, p. 184-186).

203. **Dingley** (A. H.). — Ein Kartenkundstück (*N. W.*, I, 1901-1902, p. 607-608).

204. DIXON (A. C.). — Note on Kirkman's problem (*M. M.*, XXIII, 1893, p. 88-89).

205. DUDENEY (H.). — Le problème de Kirkman [*E. T. R.*, (2), XIV, 1908, p. 97-99; XV, 1909, p. 17-19; XVII, 1910, p. 35-38 et 53].

206. ECKENSTEIN (O.). — Kirkman's schoolgirl problem [*E. T. R.*, (2), XVI, 1909, p. 76 77; XVII, 1910, p. 38-39 et 49-53], [*M. M.*, (2), XLI, 1911 1912, p. 33-36].

207. FITTING (F.). — Ein Anordnungs problem (Gladbad, 1902). — Aufstellung... 15-Pensionnatsdamen-Problem [*N. A. W.*, (2), X, 1912, p. 244-251].

208. FONTENÉ. — Triades (*I. M.*, 1898, p. 193).

209. FRAZER (P.). — Three Methodes and forty-eight solutions of the Fifteen-Problem (*American philosophical Society Proceedings*, XVIII, 1878-1880, p. 509-510).

210. FROST. — General Solution and extension of the problem of the 15 schools girls (*Q. J.*, VI, VII, VIII, XI, 1867-1870).

211. GERGONNE. — Recherches sur un tour de cartes (*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 1813-1814, p. 276-283).

212. GILL (J. H.). — Cité par R. B. (II, p. 130).

213. HUDSON. — Battements de cartes (*E. T. R.*, I, 1865, p. 105 et 1868, p. 89-91).

214. JACOBI (C. G. J.). — Questions se rattachant à l'analyse combinatoire (*Cr.*, XX, 1841, p. 287).

215. JOHNSON (W.), — Notes on the 15th Puzzle (*A. J. M.*, II, 1879, p. 397-399).

216. KIRKMANN (T. P.). — Notes of an unauswered prize question (*C. M. J.*, V, 1850, p. 255-262). — On the triads made with fifteen things (*P. M.*, XXXVII, 1850, p. 169 171). — Query (*L. G. D.*, 1850, p. 48). — Solutions to Query VI (*L. G. D.*, 1851, p. 48); (*C. M. J.*, VIII, 1853, p. 38-42). — On the puzzle of the 15 young ladies [*P. M.*, (4), XXIII, 1862, p. 198-204]. — On the 15 Puzzle (*E. T. R.*, XXXIV, 1880, p. 113-114; XXXV, 1881, p. 29-30), (*Voir* 219).

217. L. — II, p. 162, 171, 176 et 189.

218. LEA (W.). — On the 15 Puzzle (*E. T. R.*, IX, 1868, p. 35-36; XXII, 1874, p. 74-76), (*Voir* 219).

219. LEA (W.) et KIRKMANN (T. P.). – On the 15 Puzzle (*E. T. R.*, XI, 1869, p. 97), (*Voir* 216 et 218).

220. LE COINTE (J. L. A.). — Question sur un jeu de cartes (*A. D. M.*, V, 1863, p. 108-110).

221. LEMOINE (E.). — Problème de Caligula (*I. M.*, 1894, p. 184).

222. LUCAS (E.). — Problème de Caligula (*I. M.*, 1894, p. 9. 30-31 et 189-190). — Théorie des nombres (Paris, 1891; p. 211 et 491).

223. MERTELSMANN (A. F. H.). — Das Problem der 15 Pensionats-damen (*Z. S.*, XLIII, 1898, p. 329-334).

224. MONGE. — Réflexions sur un tour de cartes (*Mémoires des Savants étrangers Académie des Sciences*, Paris. 1773, p. 390-412).

225. MOORE (Hasting). — Triades (*M. A.*, XLIII, 1893, p. 271); (*R. C. M. P.*, XCI, 1895, p. 86).

226. NETTO (E.). — Triades (*M. A.*, XLII, 1893, p. 143).

227. ONNEN SEN (H.). — Gergonne's pile problem [*S. M. Am.*, (2), XVI, 1909, p. 121-130 et 265]. — Gergonnes Haufen problem (*Mathem. naturnissench. Blätter*, IX, 1912, p. 77-80, 94-96). — Gergonne's stapelprobleem (*Wiskundig Tijdschrift Haarlem*, IX, 1912-1913, p. 5-13, 81-91, 129-140, 197-205).

228. PEIRCE (B.). — Cyclic Solutions of the school-girl puzzle [*Astronomical Journal* (Gould), VI, 1860, p. 169-174].

229. POWER (J.). — On the problem of the 15een school girls (*Q. J.*, VIII, 1867, p. 236-251).

230. R. B. — II, p. 130.

231. REISS (M.). – Triades (*Cr.*, 1859, p. 326).

232. ROTHE (H. A.). – Sammlung combinat. analyt. (cité par HINDENBURG), (Leipzig, 1800, p. 263).

233. S.-L. — Rondes.

234. SAINT-LAURENT (T. de). — Mélanges ou battements singuliers de cartes (*Mémoires de l'Académie du Gard*, 1864-1865. p. 489-545).

235. STEEN. — La Souricière (*Q. J.*, XV, 1878, p. 8 10).

236. STEINER (J.). — Triades (*Cr.*, XLV, 1853, p. 181).

237. STORY (W. E.). — Note on the 15th Puzzle (*A. J. M.*, II, 1879, p. 399-404).

238. SYLVESTER (J. J.). — Synthèmes (*P. M.*, XXIV, 1844). — School-girl problem [*P. M.*, (3), XXXVII, 1850, p. 52; *P. M.*, (4), XXI, 1861, p. 371]. — On the fifteen young ladies problem (*P. L. M. S.*, VII, 1875-1876, p. 236-236). – Graphes, triades et invariants (*A. J. M.*, 1878, p. 64-128). — Sur le problème des 15 jeunes filles (*E. T. R.*, XXXIII, 1880, p. 53); (*M. M.*, XXII, 1893, p. 159-160).

239. TAIT (P. G.). — On the Generalization of Josephe's problem (*P R. S. E.*, XXII, 1897 1899, p. 165-168).

240. TANNER (L.). — Ueber Kartenmischen... (*E. T. R.*, XXXIII, 1880, p. 73-75).

241. VRIES (Jan de). — Triades (*R. C. M. P.*, LXXXI, 1894, p. 222).

242. WALECKI (cité par L., II, p. 193).

243. WELSCH. — Jeu de Josèphe ou de Caligula (*I. M.*, XIII, 1906, p. 190; XVIII, 1911, p. 110-112).

244. WHITWORTH (W. A.) et CUNNINGHAM (A.). — Solution d'une question sur les problèmes de rondes, etc. (*E. T. R.*, LXXII, 1900, p. 87).

245. WOOLHOUSE (W. S. B.). — Triadic arrangements of fifteen symbols [*P. M.*, (4), XXII, 1861, p. 510-515]. — On triadic combinations of 15 symbols (*L. G. D.*, 1862, p. 84-88; 1863, p. 79 90) (*E. T. R.*, VII, 1867, p. 76 83).

X. — Jeux d'échiquier.

1, 2, 3, 5, 6 et :

246. A. — Les cinq reines (I, p. 285-318). — Le Cavalier (I, p. 319-398).
247. AHRENS (W.). — Problème d'Échecs (*I. M.*, 1901, p. 87). — Mathematische Schachfragen (*D. Sch.*, LVI, 1901, p. 284-287; LVII, 1902, p. 124-126, 155-159 et 196-199). — Das räumliche Schachspiel (***Frankfurter Zeitung***, LII, 17 septembre 1907).
248. ANONYME. — Notice sur le jeu de Halma.
249. ARNOUX et LAISANT. — Arithmétique graphique (*A. F.*, 1900).
250. AUBRY (A.). — Dé cubique qui roule (*I. M.*, 1903).
251. BASTEROT. — Traité élémentaire du jeu des échecs (Paris, 1852).
252. BERDELLÉ. — Trajet allant de (o, o, o) à (*n*, *n*, *n*) (*I. M.*, 1899, p. 227).
253. BOUTIN (A,). — Pions non en prise (*I. M.*, 1901, p. 82). — Marche de la tour (*I. M.*, 1901, p. 153). — Dé cubique qui roule (*I. M.*, 1902). — Route passant par les points d'un quadrillage (*I. M.*, 1903, p. 181). — Jeu de Halma (*I. M.*, 1906, p. 162).
254. BROCARD. — Dé cubique qui roule (*I. M.*, 1902).
255. BUSSCHOP. — Recherches sur le jeu du Solitaire (Bruges, 1879).
256. CHERRIMAN (J. B.). — Note on the Bishop's Move at chess (***Royal Society of Canada Proc. and Transactions Montreal***, I, 1882).
257. CHRISTIE, — An inquiry in to the gaure invented by Palamede (London, 1801).
258. CICCOLINI (G.). — Il tentativo di un nuovo giuocho di Scacchi (Roma, 1820).
259. COLLINIS. — Solution du problème de cavalier au jeu des échecs (Mannheim, 1773).
260. CUNNINGHAM (A.). — Les quatre premiers coups aux échecs (***Royal Engineer's Journal***, 1889).
261. D. A. — Traité du Jeu de Combat (Paris, 1925).
262. DELANNOY (H.). — Emploi de l'échiquier pour la solution des problèmes arithmétiques (*A. F.*, 1886, p. 183-188). — Emploi de l'échiquier pour la résolution de divers problèmes de probabilités (*A. F.*, 1889, p. 229-230; 1890, p. 43-52, 1895, p. 117; 1896, p. 70 90). — Echiquier arithmétique (*A. F.*, 1895, p. 70 90). — Le Taquin généralisé (*I. M.*, 1899, p. 34 et 250).
263. DOLLINGER (J.). — Ein hundert... Schach End Spiele (Wien, 1806).
264. DURAND. — Études théoriques et pratiques (***La Régence***, 1860 à 1864).
265. DURAN-LORIGA (J.). — Chemin joignant les points d'un quinconce (*I. M.*, 1894, p. 227; 1895, p. 405).
266. DUVEAU-CARLIER (A.). — Le Solitaire amusant (1885).
267. ERICSSON. — Bibliographie du jeu d'échecs (*I. M.*, 1900, p. 63 et 412).
268. ESCOTT (E. B.). — Manières de jouer les quatre premiers coups aux échecs (*I. M.*, 1903, p. 157).

269. Euler. — Marche du Cavalier (*Mémoires Académie des Sciences de Berlin*, 1766, p. 310 377) (*Commentationes arithmeticæ collectæ Saint-Pétersbourg*, I, p. 337-355).

270. Fiorilli (E.). — Sulla possibilità di una teoria matematica del giuoco degli scacchi (*Rivista matematica fisica e sc. nat.*, XXIII, 1911, p. 421-431).

271. Fleury. — La clé du taquin ou la solution des quinze (Marseille, 1880). — Le Caméléon (*I. M.*, 1895, p. 215-216).

272. Flye Sainte Marie. — Note sur un problème relatif à la marche du Cavalier sur l'échiquier (*S. M.*, V, 1876-1877, p. 144-150). — Les quatre premiers coups aux échecs (*R. B. A.*, 1890, p. 745). — Route passant par des points d'un quadrillage (*I. M.*, 1904, p. 86).

273. Fontenay — Qui perd gagne (cité par L., II., p. 26).

274. Frost. — On the Knight's path (*Q. J.*, XIV, 1877, p. 123 125).

275. Gardes (L. F. J.). — Contribution à l'étude du Solitaire (*A. F.*, XLI, 1912; 1913, p. 80-87).

276. Giacometti. — Il nuovo giuoco di Scacchi, ossia il giuocho della Guerra (Geneva, 1801).

277. Gilbert (G. N.). — The problem of the Knight's tour (*Philosophical Society of West*, VII, 1885, p. 88).

278. Gochmann (Ch.). — Étude des coups du jeu d'échecs par les nombres complexes (en russe, 1897).

279. Gunther (S). — Zur mathematischen Theorie des Schachbretts (*A. Gr.* LVI, 1874, p. 281-292; LVII, 1875, p. 285).

280. Hanstein. — Ueber der Tasuchwerth der Steine (*Sch.*, V, 1850, p. 225-227)

281. Henry (Ch.). — Sur le Taquin [*Gazette anecdotique de Paris*, V, (2), 1880, p. 58 59 et 87 92; *N. A.*, (2), XX, 1881, p. 5].

282. Hermary. — Sur le jeu du Solitaire (*A. F.*, 1879, p. 284-294).

283. Jaenisch (C. F. von). — Problème du Cavalier (*The Chess Monthly*, III, 1859, p. 110-114, 147-150 et 176-178). — Traité des applications de l'Analyse mathématique au jeu des échecs (Saint-Pétersbourg, 1862-1863). — Essai sur le calcul mathématique.. [*le Palamède*, II, (5), 1845, p. 155-173].

284. Kirkmann (T. P.). — Note on the solution of the 15 Puzzle (*E. T. R*, XXXV, 1881, p. 29-30).

285. Kraïtchik (M.). — Études sur le jeu d'échecs, etc... (*L'Échiquier*, 1925 à 1927). — Le Problème des Reines (Bruxelles, 1926). — Le Problème du Cavalier (Bruxelles, 1927).

286. L. — I, p. 59, 86 et 89; II, p. 4, 12, 89, 92 et 94; III, p. 123 et 155; IV, p. 205 223.

287. Laisant (C. A.). — Géométrie des quinconces (*A. F.*, 1887, p. 219-235). (*Voir* 249).

288. Lamarle. — Solution d'un coup singulier du jeu de dames (*Mémoires de l'Ac. des Sc. de Belgique*, XXVII, 1852).

289. **Landau.** — Cours professé à Göttingen (1912) (Notes communiquées par M. **Errera**).

290. **Lange** (M.). — Lherbuch des Schachspiels (Halle, 1856). – Handbuch der Schachaufgaben (Leipzig, 1862). — Tauschwerth der Steine (*Sch.*, XVIII, 1863, p. 129 137). — Mathematische Schachfragen (*Sch.*, XVIII, 1863).

291. **Laquière.** — Géométrie de l'échiquier (*S. M.*, VIII, 1880, p. 82-102 et 132 152 ou Paris 1880).

292. **Lasca.** — Lasca Spiel (Notes communiquées par M. **Errera**).

293. **Lemoine** (E.). — Valeur relative des pièces du jeu des échecs (*A. F.*, IX, 1880, p. 179-183).

294. **Leopold** (L.). — Das system und die Lösung der Boss Puzzle, Spiel der Fünfzehn (Hamburg, 1880).

295. **Lucas** (E.). — Arithmétique figurative (*A. F.*, 1883, p. 83-97). — Théorie des nombres (Paris, 1891, p. 96-102 et 211-223). — Reines non en prise (*I. M.*, 1894, p. 67). — Géométrie des quinconces (*S. M.*, VI, 1877, p. 9). — Problèmes sur la géométrie des quinconces (*N. C.*, III, 1877, p. 412). — Problème analogue au taquin (*I. M.*, 1894, question 84). — Le Taquin généralisé (*I. M.*, 1899, p. 34).

296. **Maack** (F.). — Das Schachraumspiel (*Frankfurter Zeitung*, LII, 30 septembre 1907).

297. **Mac-Mahon** (P. A.). — New Mathematical Pastimes (Cambridge, 1921).

298. **Mauvillon** (F.-W.). — Anweisung zur Erlernung des Schachspiels (Essen, 1827).

299. **Milèsk**, **Aitonne**, **Fehr**, **Levy** (L.) et **Boutin** (A.). — Jeu de Halma (*I. M.*, 1896, p. 31 et 184; 1897, p. 6).

300. **Miquel.** — Application de l'analyse combinatoire au jeu des échecs (*La Stratégie*, LI, mai à septembre 1918).

301. **Mondésir** (de). — Le dernier mot du taquin (*N. P.*, 25 septembre 1880).

302. **Moore.** — On the knight's move of chess (*C. M. J.*, III, 1843, p. 233-236).

303. **Moreau** (G.). — Chemin joignant les points d'un quinconce (*I. M.*, 1895, p. 184).

304. **Oppen.** – Von Tauschwerthe der Steine im Schach (*Sch.*, II, 1847).

305. **Perott.** — Sur le problème des fous (*S. M.*, XI, 1882-1883, p. 173-186).

306. **Polignac** (de). — Marche du Cavalier (*S. M.*, XI, 1880 1881).

307. **Pratt** (P.). — Studies of Chess (London, 1825, p. 533 536).

308. R. B. — Les huit reines (II, p. 116 124); Marche du Cavalier (II, p. 219-233).

309. **Rädell** (C.). — Ueber die mathematische Behandlung des Schachspiels (*Sch.*, IV, 1848, p. 101-120).

310. **Redon** (P.). — Nouvelles recherches sur le jeu du Taquin (Paris, 1894).

311. **Rocquigny** (de). — Trajet allant de (o, o, o) à (*n*, *n*, *n*) (*I. M.*, 1899, p. 227).

312. **Roget** (Dr). – Marche du Cavalier (*P. M.*, III, vol. XVI, avril 1840, p. 305-309).

313. Rohn (K.). — Das Damenproblem auf dem Schachbrett (*D. Sch.*, LIV, 1899, p. 1 3, 33 36 et 151-153).
314. Ruchonnet. — Théorie du Solitaire, traduit du Dr Reiss (*N. C.*, III, 1877, p. 231).
315. Ruska (J.). — Zur Geschichte der Schachbrettaufgate (*Z. H.*, XLVII, 1916, p. 275-282).
316. Schubert (H.). — The Boss Puzzle (*Hamburgischer Correspondant*, 82, 1880, p. 11). — Theoretische Entscheidung ueber das Boss Puzzle Spiel (Hamburg, 1880).
317. Schurig (R.). — Die Paarung der Teilnehmer eines Turniers (*D. Sch.*, XLI, 1886, p. 134).
318. Schmolek (A. W.). — Das Solitärspiel (*Thee und Caffee-Zeitvertreib....* 2 jan. 1815, p. 2-6).
319. Simons (P.). — Le Jeu des Mages (Lierre, 1876 et 1878).
320. Szily Kolomann. — Eine Damenaufstellungsaufgabe auf dem Schachbrett (*D. Sch.*, LVI, 1901, p. 96 et 127).
321. Tait (P. G.). — Note on the Theory of the 15 Puzzle (*P. R. S. E.*, X, 1878 1880, p. 664-665).
322. Tarry (H.). — Mat aux échecs (*I. M.*, 1895, p. 205; 1903, p. 231).
323. Taylor (H. M.). — On the relative Values of the piece in chess [*I. M.*, (5), I, 1876, p. 221-229].
324. Vallot. — Sur le jeu du Solitaire (*Bulletin des Sciences de Férussac*, I, 1824, p. 137-138). — Rapport sur un travail des Suremain de Missery : Jeu du Solitaire (*Ac. des Sciences de Dijon*, 1842, p. 58 70).
325. Vandermonde. — Remarque sur les problèmes de situation (*Histoire de l'Académie des Sciences pour* 1771 : Paris, 1774, p. 556 574).
326. Waitz (C.). — Topographische Schachstudien (*Sch.*, XV, 1860, p. 406-415).
327. Warnsdorff. — Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung (Schmalkalden, 1823).
328. Wenzelides. — Bemerkungen über den Rösselsprung nebst 70 Diagrammen (*Sch.*, 1849, p. 44).
329. Wildt (J. Ch. D.). — Das Burgspiel, ein Schachspiele für Drei (*Neues Hannoverisches Magazin*, XIII, 1803).
330. Wokerle (L.). — Die Philosophie des Schach (Leipzig, 1879).

XI. — Jeux de situation.

1, 2, 3, 4, 5, 6 et :

331. Anonyme. — Jeu de Reversi (*I. M.*, 1903, p. 67).
332. Arnous de la Rivière. — Go-Bang (*I. M.*, p. 89). — Cité par L., III, p. 155.
333. Bioche. — Permutations polyédriques (*S. M.*, XXXIII, 1905, p. 868).
334. Boutin (A.). — Carrés à fermer (Jeu de l'X) (*I. M.*, 1895, p. 24; 1896, p. 19).

335. Bricard (R.). — Peut-on développer un polyèdre? (Renseignements communiqués directement par l'auteur : 1917).
336. Delannoy. — Jeu de jonction de points, Jeu militaire, etc. (cité par L., III, p. 99, 111, 120, 129 et 131).
337. Flye Sainte Marie. — Jeu de jonction de points (cité par L, III, p. 99).
338. Hamilton (W. R.). — Memorandum respecting a new system of roots of unity (*P. M.*, 1856). — On the Icosian Calculus (*R. B. A.*, 1857, p. 3). — Jeu Icosien [*Q. J.*, V, 1862, p. 305; *P. M.*, (5), XVII, 1884, p. 42].
339. Hermary. — Jeu Icosien (cité par L., II, p. 212).
340. Herschel (A. S.) — Hamilton's Icosian Game (*Q. J.*, V, 1862, p. 198-204).
341. Kirkmann. — On the polyedra (*Philosophical Transactions*, 1858, p. 160).
342. L. — II, p. 5, 83, 85, 87, 90, 101 et 201; III, p. 99 et 112.
343. Laisant. — Jeu Icosien (cité par L., II, p. 236).
344. Pfaundler. — Das Chinesisch-Japannische Go Spiel (Leipzig, 1908); La Ludo-Go Chinana et Japonana Planko-Ludo (Paris, 1910).
345. R. B. — II, p. 41, 48 et 215.
346. S. L. — Jeu de l'X.
347. Tarry (H.). — Go-Bang (*I. M.*, 1895, p. 322; 1901, question 434; 1904, p. 233).
348. Teilher (P. F.). — Jeu de l'X (*I. M.*, 1896, p. 19).

———

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

V. — Anneaux.

VI. — Problèmes divers.

VII. — Jeux linéaires.

VIII. — Autres jeux linéaires.

IX. — Jeux circulaires.

X. — Jeux d'échiquier.

XI. — Jeux de situation.